MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2022
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

a) *(2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:*

$$\begin{cases} 4x + ay - 2z = 1 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ ax + y = 0 \end{cases}$$

b) *(1 punto) Resolverlo para $a = 1$.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & 1 \\ a & -2 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a^2 - 6a - 8 = 0 \implies a = \{-1, 4\}$$

- Si $a \neq \{-1, 4\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $a = 4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

ran$(A) = 2 = $ ran$(A^*) \neq$ nº incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 4F_2 - F_1 \\ 4F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 10 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 4x + 0 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \\ \Rightarrow -9y + 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -5 \\ \Rightarrow 16z = -8 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnicas y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 € y cada casual de 4 €, calcule, justificando la respuesta:

a) (2 puntos) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio.

b) (0.5 puntos) El valor de dicho beneficio máximo.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

	Camiseta técnica	Camiseta casual	Restricción
algodón orgánico (g)	70	60	≤ 4200
lino (g)	20	10	≤ 800

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de camisetas técnicas"
  $y \equiv$ "Nº de camisetas casual"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ 70x + 60y \leq 4200 \\ ② \ 20x + 10y \leq 800 \\ ③ \ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 7x + 6y \leq 420 & \rightarrow (0, 70) \quad \& \quad (60, 0) \\ ② \ 2x + y \leq 80 & \rightarrow (0, 80) \quad \& \quad (40, 0) \\ ③ \ y \geq 10 & \rightarrow (0, 10) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

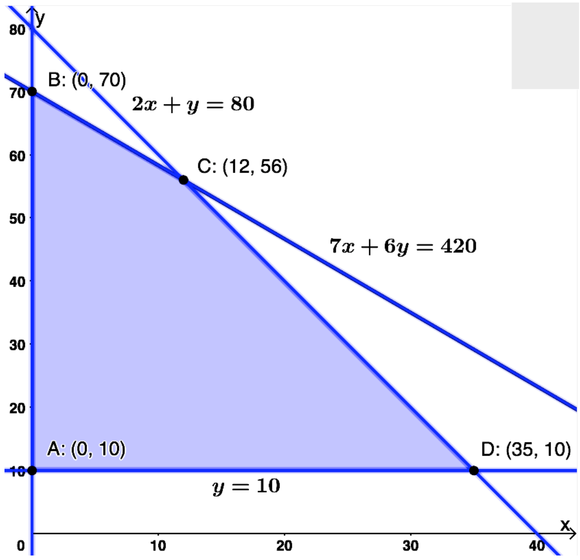
- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 5x + 4y$ (€)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	10	40
B	0	70	280
C	12	56	284
D	35	10	215

El *máximo beneficio* es de 284 €, vendiendo 12 camisetas técnicas y 56 casual.



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se estima que los beneficios en miles de euros, obtenidos en una sala de conciertos inaugurada hace 5 años, viene dado por la función $B(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 26$ donde $t \in [0,5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando la sala. Se quiere conocer:

a) (2 puntos) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio de la sala de conciertos? Razone su respuesta.

b) (0.5 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) $B'(t) = 6t^2 - 30t + 24 \implies t = \{1, 4\}$

	$(0,1)$	$(1,4)$	$(4,5)$
Signo $B'(x)$	+	-	+
$B(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0,1) \cup (4,5)$ y *decreciente* en $(1,4)$, y tiene un *máximo relativo* en $t = 1$.
Por la monotonía de la función el máximo absoluto del beneficio puede estar en $t = 1$ o en $t = 5$. Vamos a evaluar el beneficio en esos momentos: $B(1) = 37$ & $B(5) = 21$, por lo que el máximo beneficio se producirá en el primer año tras la apertura.

b) El beneficio máximo en $t = 1$ asciende a 37000 €.

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - kx + 3 & , \text{ si } x \leq 2 \\ 2x + k & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$

a) (1 punto) Calcular el valor de k para que la función sea continua en $x = 2$.

b) (1.5 puntos) Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) `Continuidad en` $x = 2$:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 - kx + 3) = 7 - 2k$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(2x + k) = 4 + k$
- $f(2) = 7 - 2k$

$f(x)$ es continua en $x = 2 \iff \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \implies 7 - 2k = 4 + k \implies \boxed{k = 1}$

b) Para $k = 1$ tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & , \text{ si } x \leq 2 \\ 2x + 1 & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

$x_0 = -1 \xrightarrow[f(x)=x^2-x+3]{x=-1} y_0 = f(-1) = 5$

$\implies (x_0, y_0) = (-1, 5)$

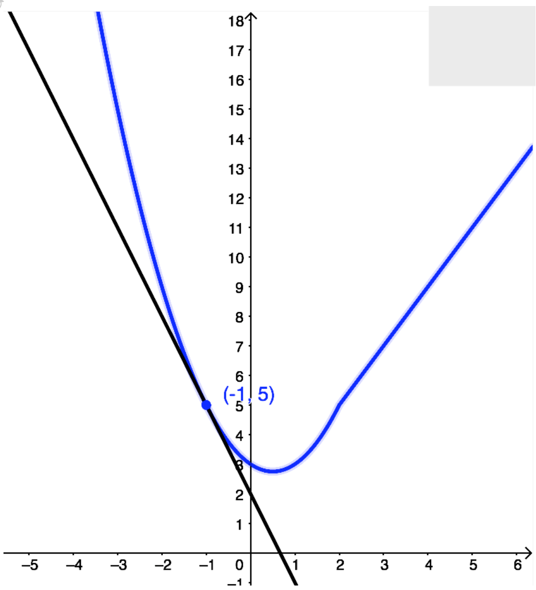
$f'(x) = 2x - 1$

$m_r = f'(x_0) = f'(-1) = -3$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

$y - 5 = -3 \cdot (x + 1)$

$\boxed{r \equiv y = -3x + 2}$



Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = x^2 \cdot e^x$, calcule:

a) *(0.5 puntos) E l dominio de la función.*

b) *(1 punto) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

c) *(0.5 puntos) Máximos y mínimos locales.*

d) *(0.5 puntos) Calcule la derivada de la función $f(x) = x^2 \cdot e^x$ en el punto de abscisa $x = 1$.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) $f(x)$ es producto de polinomio y exponencial $\implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

b) $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x = 0 \implies \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \implies x = \{-2, 0\} \\ e^x = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y *decreciente* en $(-2, 0)$.

c) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $(0, 0)$ y un *máximo relativo* en $(-2, 4/e^2)$.

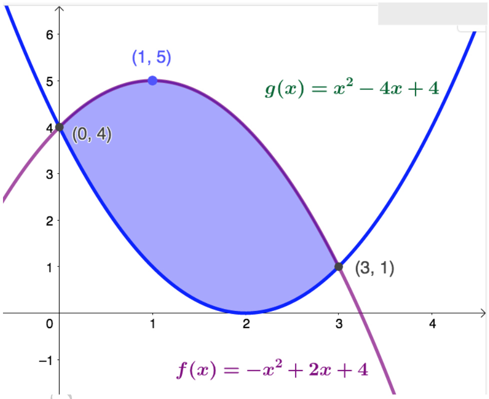
d) $f'(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^x \implies f'(1) = 3e$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. Calcular su área.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.



- $f(x) = -x^2+2x+4$ es una parábola *cóncava* ($\cap$), que corta al eje OX en $(1-\sqrt{5}, 0)$ y $(1+\sqrt{5}, 0)$ y cuyo vértice es $(1, 5)$
- $g(x) = x^2 - 4x + 4$ es una parábola *convexa* ($\cup$), que corta al eje OX en $(2, 0)$, donde también se encuentra su vértice.
- Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$-x^2 + 2x + 4 = x^2 - 4x + 4 \implies x = \{0, 3\}$$

$$Area = \int_0^3 \Big[f(x) - g(x)\Big]\, dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx = -\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \Bigg]_0^3 = (-18 + 27) - 0 = 9\ u^2$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{2x \cdot e^{x^2}}{e^{x^2} + 2}$.

a) *(1 punto) Calcular* $\displaystyle\int \frac{2x \cdot e^{x^2}}{e^{x^2} + 1}\, dx$.

b) *(1.5 puntos) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) $$\int \underbrace{\frac{2x \cdot e^{x^2}}{e^{x^2} + 1}}_{u'/u}\, dx = \ln\left(e^{x^2} + 1\right) + C$$

b) $$f(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2}}{e^{x^2} + 2} = 0 \implies 2x \cdot e^{x^2} = 0 \implies \begin{cases} 2x = 0 \implies x = 0 \\ e^{x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$$

Punto de corte con el eje OX, junto con la recta $x = 1$, define el recinto $A_1 : (0, 1)$.

$$Area = \left|\int_0^1 f(x)\, dx\right| = \ln\left(e^{x^2} + 2\right)\Big]_0^1 = |\ln(e + 1) - \ln 3| = \left|\ln \frac{e+2}{3}\right| \simeq 0.4528\ u^2$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

a) *En el departamento informático de unos grandes almacenes se encuentran a la venta ordenadores de distintas marcas comerciales. Hay 100 ordenadores de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un ordenador esté obsoleto es 0.01 para la marca A; 0.02 para la marca B y 0.03 para la marca C. Un comprador elige un ordenador al azar.*

   I) *(0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que el ordenador esté obsoleto.*

   II) *(1 punto) Sabiendo que el ordenador elegido es obsoleto, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?*

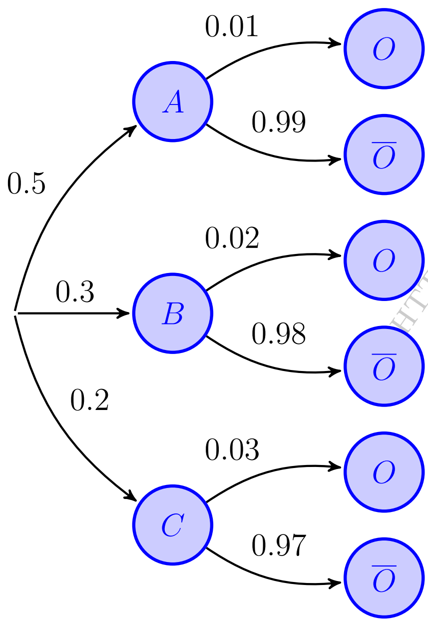
b) *(1 punto) El salario mensual de los hogares de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 160 euros. Seleccionados 40 hogares al azar, han tenido un salario medio mensual de 1100 euros. Calcule un intervalo de confianza para el salario medio mensual de los hogares de ese municipio con un nivel de confianza del 95 %.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

$A \equiv$ "El ordenador es de la marca A" $\quad B \equiv$ "El ordenador es de la marca B"

$C \equiv$ "El ordenador es de la marca C" $\quad O \equiv$ "El ordenador está obsoleto"



$$P(A) = \frac{100}{100+60+40} = 0.5$$

$$P(B) = \frac{60}{200} = 0.3 \quad \& \quad P(C) = \frac{40}{200} = 0.2$$

I) $P(O) = P\big((A\cap O)\cup(B\cap O)\cup(C\cap O)\big)$
$= P(A\cap O) + P(B\cap O) + P(C\cap O)$
$= P(A)\cdot P(O\mid A) + P(B)\cdot P(O\mid B)$
$+ P(C)\cdot P(O\mid C) = 0.5\cdot 0.01$
$+ 0.3\cdot 0.02 + 0.2\cdot 0.03 = 0.017$

II) $$P(A\mid O) = \frac{P(A\cap O)}{P(O)} = \frac{P(A)\cdot P(O\mid A)}{P(O)} = \frac{0.5\cdot 0.01}{0.017} = 0.2935$$

b) $X \equiv$ "Salario mensual de los hogares (€)" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 160)$

$$X : \mathcal{N}(\mu,160) \xrightarrow{n=40} \overline{x} = 1100 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\cdot\frac{160}{\sqrt{40}} = 49.58$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x}-E;\overline{x}+E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (1050.42;1149.58)}$$