MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2023
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

a) *(2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:*

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

b) *(0.5 puntos) Resolverlo para $a = 3$.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a = a \cdot (a-1) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

- Si $a \neq \{0,1\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 0 + \frac{2}{3} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 + 3z = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 2 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 1 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

a) *(2 puntos) Represente la región S y calcule sus vértices.*

b) *(0.5 puntos) Determine los puntos de la región factible donde la función $f(x, y) = 4x - 5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

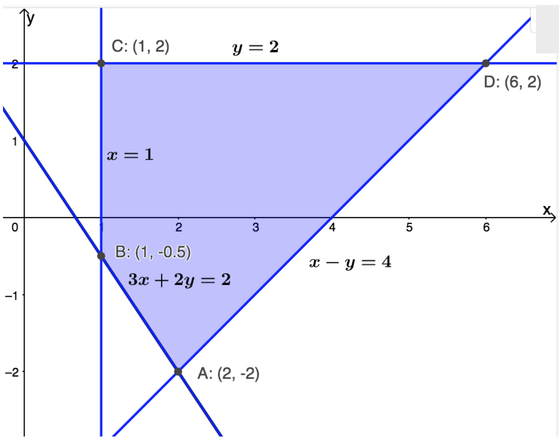
Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$S \equiv \begin{cases} ① \; 3x + 2y \geq 2 & \rightarrow (0, 1) \quad \& \quad (2, -2) \\ ② \; x - y \leq 4 & \rightarrow (0, -4) \quad \& \quad (4, 0) \\ ③ \; x \geq 1 & \rightarrow (1, 0) \\ ④ \; y \leq 2 & \rightarrow (0, 2) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 4x - 5y$
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	2	-2	18
B	1	-0.5	6.5
C	1	2	-6
D	6	2	14



El *mínimo* de $f(x, y)$ es de -6 y se produce en el punto $C : (1, 2)$, mientras que el *máximo* es de 18 y se produce en punto $A : (2, -2)$.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

La función de costes de una empresa $C(q) = q^2 - 16q + 48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p = 12 - q$, donde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) (1 punto) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción.

b) (1 punto) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.

c) (0.5 puntos) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio.

d) (0.5 puntos) El valor del beneficio máximo.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $B(q) = I(q) - C(q) = q \cdot (12 - q) - (q^2 - 16q + 48) = -2q^2 + 28q - 48$

b) $B'(q) = -4q + 28 = 0 \implies q = 7$

$B''(q) = -4 \implies B''(7) = -4 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máximo en $q = 7$

Luego la producción que maximiza los beneficios es $q = 7$ unidades.

c) El precio unitario con esa producción será $p = 12 - q = 12 - 7 = 5$

d) El beneficio máximo será $B(7) = 50$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

$$\text{Dada la función } f(x) = \begin{cases} ax+5 & , \text{si } x \leq -1 \\ bx^2-2x+1 & , \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} & , \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.

b) (1 punto) Determine la derivada $f'(x)$ para $x > 2$.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $f_1(x) = ax+5$ y $f_2(x) = bx^2-2x+1$ son continuas por ser polinomios, mientras que $f_3(x) = \dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, luego continua en $x > 2$. Por tanto estudiaremos la continuidad en las fronteras $x = -1$ y $x = 2$.

`Continuidad en` $x = -1$:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(ax+5) = -a+5$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(bx^2-2x+1) = b+3$
- $f(-1) = -a+5$

$f(x)$ es continua en $x = -1 \iff \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(-1) \xrightarrow{-a+5=b+3} \odot\ a+b=2$

`Continuidad en` $x = 2$:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} = (bx^2-2x+1) = 4b-3$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} = 5$
- $f(2) = 4b-3$

$f(x)$ es continua en $x = 2 \iff \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(2) \xrightarrow[\odot\ a+b=2]{4b-3=5} \boxed{b=2}\ \&\ \boxed{a=0}$

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \iff a = 0\ \&\ b = 2$.

b) Para $x > 2$ la función es $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{3\cdot(x-1)^{\cancel{2}} - (3x-1)\cdot 2\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{-3x-1}{(x-1)^3}$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x}$

a) (0.5 puntos) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) (0.5 puntos) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.

c) (1 punto) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) (0.5 puntos) Máximos y mínimos locales.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a)
- `Dominio:` $x = 0 \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- Corte con OX: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x} = 0 \xrightarrow{x^2-4x+4=0} x = 2 \implies (2,0)$
- `Corte con` $OY : x = 0 \notin \mathrm{Dom}(f)$

b)
- `A. Vertical:` $\exists$ $A.V.$ en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = \left[\frac{4}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \underset{x\to\pm\infty}{\nexists\ A.H.}$

c) $f'(x) = \dfrac{(2x-4)\cdot x - (x^2 - 4x + 4)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \implies x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y *decreciente* en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

d) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $(2, 0)$ y un *máximo relativo* en $(-2, -8)$.

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = 3e^{x+2}$:

a) (1.25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$.

b) (1.25 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = 3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $x_0 = -2 \implies y_0 = f(x_0) = f(-2) = 3 \implies (x_0, y_0) = (-2, 3)$

$f'(x) = 3e^{x+2}$

$m_r = f'(x_0) = f'(-2) = 3$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 3 = 3 \cdot (x+2) \implies \boxed{r \equiv y = 3x + 9}$

b) $f(x) = 3e^{x+2} = 0 \implies \nexists$ Sol., lo que junto con la recta $x = 1$ y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x \to -\infty} 3e^{x+2} = 0$, determina un intervalo de integración impropio $(-\infty, 1)$

$$Area = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^1 3e^{x+2}\,dx = \lim_{a \to -\infty} 3e^{x+2}\Big]_a^1 = \lim_{a \to -\infty} \left[3e^3 - 3e^{a+2}\right]$$
$$= 3e^3 - e^{-\infty} = 3e^3 \simeq 60.26\ u^2$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = 3 + x$ y calcular su área.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

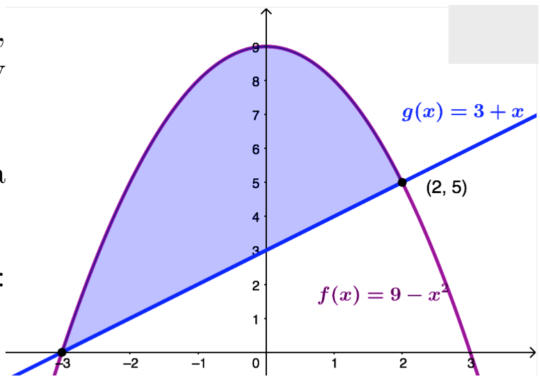
Solución.

- $f(x) = 9 - x^2$ es una parábola *cóncava* ($\cap$), que corta al eje OX en los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y cuyo vértice es $(0, 9)$.

- $g(x) = 3 + x$ es una recta *creciente* que pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(-3, 0)$.

- Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$-x^2 + 9 = x + 3 \implies x = \{-3, 2\}$$



$$Area = \int_{-3}^{2} \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\Big]_{-3}^{2}$$
$$= \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12\right) - \left(9 - \frac{9}{2} - 18\right) = \frac{125}{6} \simeq 20.83\ u^2$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

a) *Sean A y B dos sucesos, tales que*

$$P(A) = 0.3 \qquad \& \qquad P(B \mid A) = 0.6 \qquad \& \qquad P(A \mid B) = 0.3$$

I) *(0.5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$.*

II) *(0.5 puntos) Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta.*

III) *(0.5 puntos) Calcular $P(A \cup \overline{B})$.*

b) *(1 punto) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1.69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5.84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99 %.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) I) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow 0.6 = \dfrac{P(A \cap B)}{0.3} \Longrightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.18}$

II) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow 0.3 = \dfrac{0.18}{P(B)} \Longrightarrow \boxed{P(B) = 0.6}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ P(A \cap B) = 0.18 \\ \bullet\ P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ son independientes} \end{array}\right.$$

III) $P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = \cancel{P(A)} + P(\overline{B}) - \left[\cancel{P(A)} - P(A \cap B)\right]$

$= P(\overline{B}) + P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0.6 + 0.18$

$\Longrightarrow \boxed{P(A \cup \overline{B}) = 0.58}$

b) $X \equiv$ "Calificaciones de matemáticas (puntos)" $\xrightarrow{\sigma^2 = 1.69} X : \mathcal{N}(\mu, 1.3)$

$X : \mathcal{N}(\mu, 1.3) \xrightarrow{n=324} \overline{x} = 5.84 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.99$

$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \dfrac{1.3}{\sqrt{324}} = 0.186$

$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (5.654; 6.026)}$