MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2023
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) *(0.5 puntos) Calcular el determinante de* $A^\top A$.

b) *(0.5 puntos) Calcular el rango de* BA *en función de* b.

c) *(0.75 puntos) Calcular* B^{-1} *para* $b = 2$.

d) *(0.75 puntos) Para* $b = 1$, *calcular* B^5.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $A^\top A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left| A^\top A \right| = 0$

b) $\text{ran}(BA) = \text{ran}\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \text{ran}\begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & 2b \end{vmatrix} = 4b = 0 \Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } b \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(BA) = 2 \\ \text{Si } b = 0 \Longrightarrow \text{ran}(BA) = \text{ran}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \end{cases}$$

c) Para $b = 2 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{|B|=4} B^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

d) Para $b = 1 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$B^5 = B^2 \cdot B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \dfrac{5v}{3} & \text{, si } 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3} & \text{, si } v \geq 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) Si $v \geq 3 \implies c(v) = 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3} \implies c'(v) = -4 + \dfrac{2v}{3} = 0 \implies v = 6$

$c''(v) = \dfrac{2}{3} \implies c''(6) = \dfrac{2}{3} > 0 \overset{(\cup)}{\implies}$ Mínimo en $v = 6$

Por lo tanto si la velocidad es superior a 30 km/h, el consumo mínimo se producirá circulando a 60 km/h y será de $c(6) = 2$ litros por cada 100 km.

b) $c'(v) = \begin{cases} \dfrac{5}{3} > 0 \text{ (creciente)} & \text{, si } 0 \leq v < 3 \\ -4 + \dfrac{2v}{3} = 0 \implies v = 6 \text{ (mínimo)} & \text{, si } v \geq 3 \end{cases}$

Vamos a evaluar la función en los extremos de los intervalos:

$$c(1) = 1.67 \qquad \& \qquad c(3) = 5 \qquad \& \qquad c(6) = 2 \qquad \& \qquad c(8) = 3.33$$

Luego el consumo empieza en 1.67, crece hasta 5, decrece hasta 2 y vuelve a crecer hasta 3.33. Así pues el consumo mínimo es de 1.67 litros a los 100 km circulando a una velocidad de 10 km/h mientras que el máximo es de 5 litros a los 100 km circulando a una velocidad de 30 km/h.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sean el plano $\pi \equiv z = 1$, los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) Como tanto en P, como en Q la coordenada $z = 1$, ambos puntos pertenecen al plano π porque verifican su ecuación.

b) $r \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ Q(0,0,1) \end{cases} \quad r \equiv \begin{cases} Q(0,0,1) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{QP} = (1,1,0) \end{cases} \quad r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \; \lambda \in \mathbb{R}$

Sea $\pi' \equiv z = 0$ y observamos que, como $\vec{d_r} \cdot \vec{n}_{\pi'} = (1,1,0) \cdot (0,0,1) = 0 \implies r \parallel \pi'$

Así que una recta $t \in \pi'$ tal que $t \parallel r$ es cualquier recta paralela a r que pase por un punto de π', por ejemplo el $T(0,0,0)$ (observe que $z = 0$).

$$t \equiv \begin{cases} T(0,0,0) \\ \vec{d_t} = \vec{d_r} = (1,1,0) \end{cases} \quad t \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}, \; \lambda \in \mathbb{R}$$

c) La recta s buscada pasará por $P(1,1,1)$ y por un punto $S \in \pi''$, siendo π'' el plano perpendicular a π que contiene a la recta r.

$$\pi'' \equiv \begin{cases} Q(0,0,1) \\ \vec{u} = \vec{d_r} = (1,1,0) \\ \vec{v} = \vec{n}_\pi = (0,0,1) \end{cases} \implies \pi'' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi'' \equiv x - y = 0$$

Sea $S(2,2,\mu)$ el citado punto. Obligamos ahora a que los vectores $\vec{d_r} = (1,1,0)$ y $\overrightarrow{PS} = (1,1,\mu-1)$ formen un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{PS} \cdot \vec{d_r}\right|}{\left|\overrightarrow{PS}\right| \cdot \left|\vec{d_r}\right|} = \frac{(1,1,\mu-1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{1+1+(\mu-1)^2} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{|1+1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+(\mu-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 = \sqrt{2+(\mu-1)^2} \implies 4 = 2 + (\mu-1)^2 \implies \mu = 1 \pm \sqrt{2} \implies \begin{cases} S(2,2,1-\sqrt{2}) \\ S'(2,2,1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ \overrightarrow{PS} = (1,1,-\sqrt{2}) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1-\sqrt{2}\lambda \end{cases} \quad s' \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ \overrightarrow{PS'} = (1,1,\sqrt{2}) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Sabiendo que $P(A) = 0.5 \quad \& \quad P(A \mid B) = 0.625 \quad \& \quad P(A \cup B) = 0.65$*, se pide calcular:*

a) (1.5 puntos) $P(B) \quad \& \quad P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P(A \mid A \cup B) \quad \& \quad P(A \cap B \mid A \cup B)$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.625 \implies P(A \cap B) = 0.625 \cdot P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0.65 = 0.5 + P(B) - 0.625 \cdot P(B)$

$\implies 0.15 = 0.375 \cdot P(B) \implies \boxed{P(B) = 0.4} \xrightarrow{P(A\cap B)=0.625\cdot P(B)} \boxed{P(A \cap B) = 0.25}$

b) $P(A \mid A \cup B) = \dfrac{P\big(A \cap (A \cup B)\big)}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0.5}{0.65} = 0.7692$

$P(A \cap B \mid A \cup B) = \dfrac{P\big((A \cap B) \cap (A \cup B)\big)}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0.25}{0.65} = 0.3846$

Julio 2023
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dado el sistema

$$\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases}$$

se pide:

a) *(1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.*

b) *(0.5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.*

c) *(0.75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 3 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2k^2 + 3k = k \cdot (-2k + 3) = 0 \implies k = \{0, 3/2\}$$

- Si $k \neq \{0, 3/2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $k = 3/2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = 3$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que es un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 + 3F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow -2x - \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 7 \cdot \frac{2}{3} = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 9z = 6 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = -5/3 \\ z = 2/3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 3/2$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow -2x - 3 + \frac{\lambda}{2} + \frac{3\lambda}{2} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y + \frac{1}{2}\lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = -3 + \frac{\lambda}{2} \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \qquad g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$.

b) (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ *y* $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

a) $f(x) = 2 + 2x - 2x^2 = 0 \implies x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$h(x) = |f(x)| = \begin{cases} -2 - 2x + 2x^2 \\ 2 + 2x - 2x^2 \\ -2 - 2x + 2x^2 \end{cases} \quad \& \quad h'(x) = \begin{cases} -2 + 4x & , \text{si } x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2 - 4x & , \text{si } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -2 + 4x & , \text{si } x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

- `Continuidad en` $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
  - $\lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}^-} h(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} (2+2x-2x^2) = 0$
  - $\lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}^+} h(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} (-2-2x+2x^2) = 0$
  - $h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

  $\lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} h(x) = h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \implies h(x)$ es continua en $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

- `Continuidad en` $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
  - $\lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}^-} h(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (-2-2x+2x^2) = 0$
  - $\lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}^+} h(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (2+2x-2x^2) = 0$
  - $h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

  $\lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}} h(x) = h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \implies h(x)$ es continua en $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

  Por lo tanto $h(x)$ es *continua* en $\mathbb{R}$.

- `Derivabilidad en` $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
  - $\lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}^-} h'(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} (-2+4x) = -2\sqrt{5}$
  - $\lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}^+} h'(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} (2-4x) = 2\sqrt{5}$

  $\lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}^-} h'(x) \neq \lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}^+} h'(x) \implies h(x)$ no es derivable en $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

- `Derivabilidad en` $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
  - $\lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}^-} h'(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (2-4x) = 2\sqrt{5}$
  - $\lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}^+} h'(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (-2+4x) = -2\sqrt{5}$

  $\lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}^-} h'(x) \neq \lim\limits_{x\to \frac{1+\sqrt{5}}{2}^+} h'(x) \implies h(x)$ no es derivable en $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

  Luego la función $h(x)$ es *derivable* en $\mathbb{R} - \left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) Sea $p(x) = g(x) - f(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3 - (2 + 2x - 2x^2) = 2x^3 + 6x^2 - 8x = 0 \implies x = \{-4, 0, 1\}$, que entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$ define dos recintos de integración $A_1 : (0, 1)$ y $A_2 : (1, 2)$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 \left(2x^3+6x^2-8x\right)dx = \left.\frac{x^4}{2}+2x^3-4x^2\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{2}+2-4\right)-0 = -\frac{3}{2} \\
A_2 &= \int_1^2 p(x)\,dx = \int_1^2 \left(2x^3+6x^2-8x\right)dx = \left.\frac{x^4}{2}+2x^3-4x^2\right]_1^2 \\
&= (8+16-16)-\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{19}{2} \\
Area &= |A_1|+|A_2| = \frac{3}{2}+\frac{19}{2} = 11\ u^2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados el plano $\pi \equiv x+3y+2z+14=0$ *y la recta* $r \equiv \begin{cases} x=2 \\ z=5 \end{cases}$ *, se pide:*

a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π *más próximo al origen de coordenadas.*

b) (1 punto) Calcular la proyeccción ortogonal del eje OZ *sobre el plano* π*.*

c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r*, que esté contenida en* π*, y que corte al eje* OZ*.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

a) Sea s la recta perpendicular a π que pasa por $O(0,0,0)$.

$$
s \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1,3,2) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \\ z=2\lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}
$$

$$
P = s\cap\pi \implies \lambda+3\cdot 3\lambda+2\cdot 2\lambda+14=0 \implies \lambda=-1 \implies \boxed{P(-1,-3,-2)}
$$

b) Sea π' el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ

$$
\pi' \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{u} = \vec{d}_{OZ} = (0,0,1) \\ \vec{v} = \vec{n}_\pi = (1,3,2) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi' \equiv 3x-y=0
$$

$$
t \equiv \pi\cap\pi' \implies t \equiv \begin{cases} x+3y+2z+14=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}
$$

c) Si la recta q buscada está contenida en π y corta al eje OZ, pasará por el punto de intersección $Q = OZ\cap\pi \implies 0+0+2z+14=0 \implies z=-7 \implies Q(0,0,-7)$

$$
r \equiv \begin{cases} x=2 \\ z=5 \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=\lambda \\ z=5 \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}
$$

Si la recta q que buscamos es perpendicular a r y está contenida en π

$$\vec{d_q} = \vec{d_r} \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2, 0, -1) \implies q \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -7 - \lambda \end{cases} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

El 65 % de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que , dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de alumnos que superan el práctico a la primera”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.65)$$

a) $P(\text{“Tres no aprueban a la primera”}) = P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0.65^7 \cdot 0.35^3 = 0.2522$

b) $P(\text{“Alguno no aprueba a la primera”}) = P(X < 10) = 1 - P(X \geq 10)$

$$= 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{10} \cdot 0.65^{10} \cdot 0.35^0 = 0.9865$$

c) $X : \mathcal{B}(60, 0.65) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 60 > 20 \checkmark \\ np = 39 > 5 \checkmark \\ nq = 21 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right) = \mathcal{N}(39, 3.69)$

$$P(X \geq 30) = P(Y \geq 29.5) = P\left(Z \geq \frac{29.5 - 39}{3.69}\right) = P(Z \geq -2.57)$$
$$= P(Z \leq 2.57) = 0.9949$$
