MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2023

- Extraordinario -

(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine la matriz X tal que, $A \cdot X = B$.

b) (1 punto) Calcule $B \cdot B^{\top} \cdot A^{-1}$, donde $B^{\top}$ denota la matriz transpuesta de B y A^{-1} la matriz inversa de A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

$$|A| = 1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}}$$

b) $$B \cdot B^{\top} \cdot A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

> *Una familia acaba de comprar una parcela y desea construir en ella una piscina rectangular. Tiene que decidir el largo y el ancho de la piscina sabiendo que el largo no puede ser más de 2 veces el ancho, y que 3 veces el ancho no puede sobrepasar a 2 veces el largo. Además, el perímetro debe tener 30 metros como máximo y quieren que la piscina tenga al menos 4 metros de ancho. ¿Qué dimensiones deben elegir si quieren una piscina lo más larga posible?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Largo de la piscina (m)"
  $y \equiv$ "Ancho de la piscina (m)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

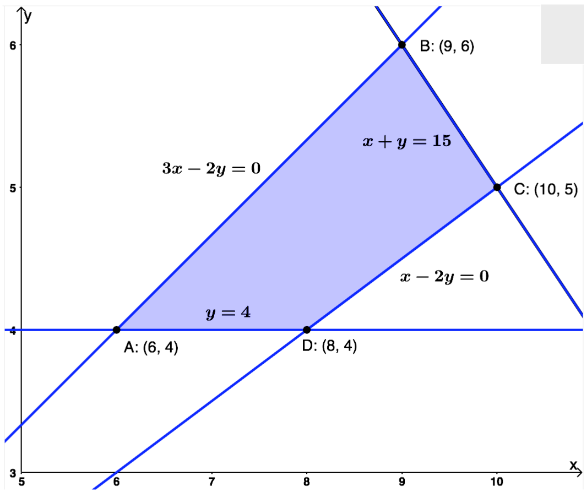
$$\begin{cases} ① \; x \leq 2y \\ ② \; 3y \leq 2x \\ ③ \; 2x + 2y \leq 30 \\ ④ \; y \geq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x - 2y \leq 0 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (6,3) \\ ② \; 3y - 2x \leq 0 & \rightarrow (0,) \quad \& \quad (3,2) \\ ③ \; x + y \leq 15 & \rightarrow (0,15) \quad \& \quad (15,0) \\ ④ \; y \geq 4 & \rightarrow (0,5) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = x$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	6	4	6
B	9	6	9
C	10	5	10
D	8	4	8



La *piscina más larga* que cumple las restricciones pedidas medirá 10 m de largo por 5 de ancho.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la siguiente función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases} ax^2\cdot e^{x-3} & ,\ si\ x\le 3\\ \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x} & ,\ si\ x>3\end{cases}$$

a) *(1 punto) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x=3$.*

b) *(1 punto) Para $a=1$, determine los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty,1)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) `Continuidad en` $x=3$:

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} ax^2\cdot e^{x-3}=9a$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+2)\cdot\cancel{(x-3)}}{x\cdot\cancel{(x-3)}}=\dfrac{5}{3}$
- $f(3)=9a$

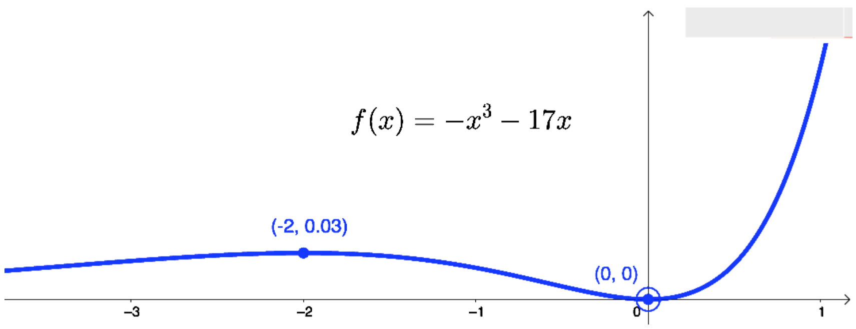
$$f(x) \text{ es continua en } x=3 \iff \lim_{x\to 3} f(x)=f(3) \implies 9a=\frac{5}{3} \implies \boxed{a=\frac{5}{27}}$$

b) Para $a=1$, cuando $x\in(-\infty,1)$ la función es $f(x)=x^2\cdot e^{x-3}$

$$f'(x)=2x\cdot e^{x-3}+x^2\cdot e^{x-3}=(x^2+2x)\cdot e^{x-3}=0 \implies \begin{cases} e^{x-3}=0 \implies \nexists \text{ Sol.}\\ x^2+2x=0 \implies x=\{-2,0\}\end{cases}$$

$$f''(x)=(2x+2)\cdot e^{x-3}+(x^2+2x)\cdot e^{x-3}=(x^2+4x+2)\cdot e^{x-3}$$

$$\implies \begin{cases} f''(-2)=-\dfrac{2}{e^5}<0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo relativo en } x=-2\in(-\infty,1)\\ f''(0)=\dfrac{2}{e^3}>0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo relativo en } x=0\in(-\infty,1)\end{cases}$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean dos sucesos A y B tales que

$$P(A) = 0.57 \quad \& \quad P(B) = 0.46 \quad \& \quad P(A \cap B) = 0.28$$

Calcula las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) $P(A \cup B)$.

b) (1 punto) $P(B \mid \overline{A})$ siendo $\overline{A}$ el suceso complementario de A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.57 + 0.46 - 0.28 \implies \boxed{P(A \cup B) = 0.75}$

b) $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0.46 - 0.28}{1 - 0.57} \Rightarrow \boxed{P(B \mid \overline{A}) = 0.4186}$

———————— ○ ————————

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La longitud en metros de un coche se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0.2$ metros.

a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 4 centímetros con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 4$ metros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 36$ coches, la longitud media, $\overline{X}$, sea mayor de 4.04 metros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Longitud de un coche (m)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0.2)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.04 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.2}{\sqrt{n}} < 0.04 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{0.2}{0.04}\right)^2 = 96.04 \implies \boxed{n = 97}$$

b) $X : \mathcal{N}(4, 0.2) \xrightarrow{n=36} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(4, \dfrac{0.2}{\sqrt{36}}\right) = \mathcal{N}(4, 0.033)$

$$P(\overline{X} \geq 4.04) = P\left(Z \geq \frac{4 - 0.04}{0.033}\right) = P(Z \geq 1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2)$$
$$= 1 - 0.8849 = 0.1151$$

———————— ○ ————————

Julio 2023 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2ax + y + 2z = 2 \\ x - az = 0 \\ 3x - y - z = 2a \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2a^2 - 3a - 1 = 0 \implies a = \{-1, -1/2\}$$

- Si $a \neq \{-1, -1/2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = -1/2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche} \textsc{Sistema Incompatible } (\nexists \text{ solución})$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 5F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 4 \cdot \frac{2}{3} = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 12z = 8 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2/3 \\ y = -2/3 \\ z = 2/3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la siguiente función real de variable real dependiente de un parámetro real a:

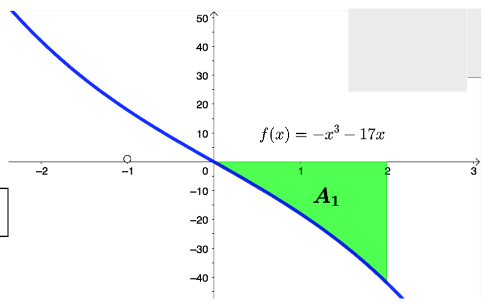
$$f(x) = -x^3 + 4ax^2 - 17x + 5a$$

a) (1 punto) Calcule el valor de a para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea la misma que la pendiente de la recta $g(x) = \sqrt{3} - 4x$.

b) (1 punto) Para $a = 0$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.



a) $f'(x) = -3x^2 + 8ax - 17$

$g'(x) = -4$

$m_r = f'(1) = g'(1) \Rightarrow -20 + 8a = -4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

b) Para $a = 0$ $\quad f(x) = -x^3 - 17x = 0 \implies x = \left\{-\sqrt{17}, 0, \sqrt{17}\right\}$, que entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$ define un único recinto de integración $A_1 : (0, 2)$

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(-x^3 - 17x\right) dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{17x^2}{2}\Bigg]_0^2 = (-4 - 34) - 0 = -38$$

$Area = |A_1| = |-38| = 38\ u^2$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x}$$

a) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) (1 punto) Determine las asítotas de la función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $f'(x) = \dfrac{(2x+4)\cdot x - (x^2+4x+3)}{x^2} = \dfrac{x^2-3}{x^2} = 0 \implies x = \pm\sqrt{3}$

	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y *decreciente* en $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$.

b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

- A. Vertical: $\exists\, A.V.$ en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+4x+3}{x} = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- A. Horizontal: $\nexists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4x+3}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty$$

- A. Oblicua: $\exists \underset{x\to\pm\infty}{A.O.}$ en $y = x + 4$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4x+3}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+4x+3}{x} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}+4x+3-\cancel{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+3}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{4}{1} = 4$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Un restaurante de comida rápida sirve el $40\,\%$ *de los menús para consumir en el local, el* $35\,\%$ *es transportado por motoristas a domicilio (*delivery*) y el resto de menús son recogidos por los clientes en el local (*take-ayay*). El restaurante tiene un menú vegetariano que es consumido por el* $8\,\%$ *de los clientes en el local, el* $5\,\%$ *de los pedidos a domicilio y el* $12\,\%$ *de los recogidos en el local por los propios clientes. Eligiendo un menú al azar, calcule la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Sea vegetariano.

b) (1 punto) Haya sido llevado a domicilio por un motorista, sabiendo que .es vegetariano

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

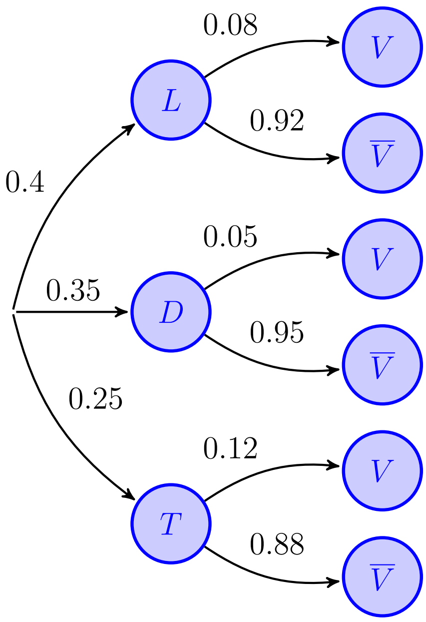
Sean los sucesos:

$L \equiv$ "La comida se consume en el local"

$D \equiv$ "La comida se reparte a domicilio (*delivery*)"

$T \equiv$ "La comida es para llevar (*take away*)"

V"El menú es vegetariano"



a) $P(V) = P\Big((L\cap V)\cup(D\cap V)\cup(T\cap V)\Big)$
$= P(L\cap V) + P(D\cap V) + P(T\cap V)$
$= P(L)\cdot P(V \mid L) + P(D)\cdot P(V\mid D)$
$+ P(T)\cdot P(V\mid T) = 0.4\cdot 0.08$
$+ 0.35\cdot 0.05 + 0.25\cdot 0.12 = 0.0795$

b) $$P(D\mid V) = \frac{P(D\cap V)}{P(V)} = \frac{P(D)\cdot P(V\mid D)}{P(V)} = \frac{0.35\cdot 0.05}{0.0795} = 0.22$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La vida media de una persona medida en semanas se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 300$ semanas.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas ya fallecidas, obteniéndose una media muestral de 4020 semanas. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.*

b) *(1 punto) ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para que la longitud del intervalo anterior no sobrepase las 100 semanas?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Vida media de una persona (semanas)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 300)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 300) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 4020 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{300}{\sqrt{20}} = 172.73$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (3847.27; 4192.73)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 100 \implies E \leq 50 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.99$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{300}{\sqrt{n}} \leq 50 \implies n \geq \left(2.575 \cdot \frac{300}{50}\right)^2 = 238.7 \implies \boxed{n = 239}$$