MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2023
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierto día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200 €. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4 € y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

a) (1.25 puntos) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día.

b) (1.25 puntos) Resuélvalo.

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Nº de sacos de 25 kg”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de sacos de 50 kg”}$$
$$z \equiv \text{“Nº de sacos de 100 kg”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=180 \\ 4\cdot(25x+50y+100z)=29200 \\ x=2\cdot(y+z) \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z=180 \\ x+2y+4z=292 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 2 & 4 & 292 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 3 & 112 \\ 0 & -3 & -3 & -180 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3+3F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 3 & 112 \\ 0 & 0 & 6 & 156 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+34+26=180 \\ \Rightarrow y+3\cdot 26=112 \\ \Rightarrow 6z=156 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=120 \\ y=34 \\ z=26 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

El ayuntamiento dispone de 48000 € para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m^3 anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita 8 m^3 de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los 4 m^3 anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de 400 €, siendo esta cantidad de 800 € para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de 450 kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de 600 kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.

a) (0.75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

c) (0.5 puntos) ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?

d) (0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicha producción?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

- `Incógnitas:`

$$x \equiv \text{“Superficie dedicada al cultivo de hortalizas (Ha)”}$$
$$y \equiv \text{“Superficie dedicada al cultivo de árboles frutales (Ha)”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \leq 50 \\ ② \ y \geq 10 \\ ③ \ 8x + 4y \leq 480 \\ ④ \ 400x + 800y \leq 48000 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x \leq 50 & \to (50, 0) \\ ② \ y \geq 10 & \to (0, 10) \\ ③ \ 2x + y \leq 120 & \to (0, 120) \quad \& \quad (60, 0) \\ ④ \ x + 2y \leq 120 & \to (0, 60) \quad \& \quad (120, 0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

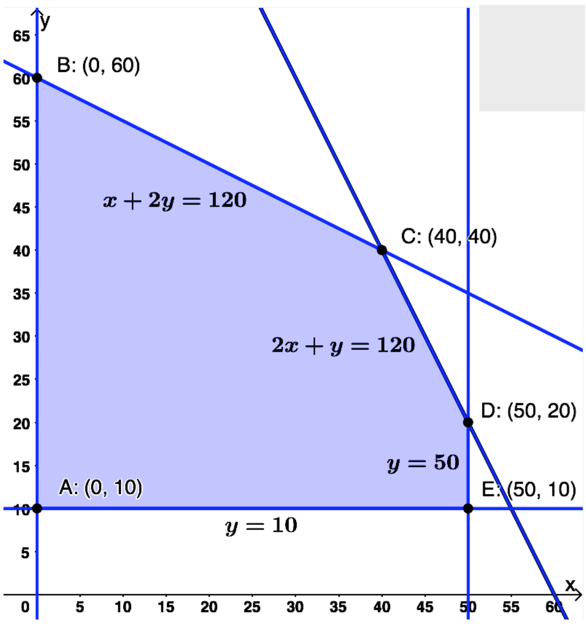
$$f(x, y) = 450x + 600y \text{ (kg)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	10	6000
B	0	60	36000
C	40	40	42000
D	50	20	34500
E	50	10	28500

La *producción máxima anual total* es de 42000 kg y se obtiene destinando 40 Ha de terreno al cultivo de hortalizas y otras 40 al de árboles frutales.



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

a) *(1.25 puntos) ¿Cuáles son las asíntotas (horizontales, verticales y/u oblicuas) de la siguiente función?*

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$$

b) *(1.25 puntos) Dada la siguiente función definida a trozos:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & , \text{ si } 0.5 \leq x < 1 \\ ax^2 + b & , \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \\ e^x + 1 & , \text{ si } 2 < x \leq 2.5 \end{cases}$$

Determine los parámetros a y b para que f sea continua en el intervalo $[0.5, 2.5]$.

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $x - 1 = 0 \implies x = 1 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

- `A. Vertical:` $\exists A.V.$ en $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-1}{x-1} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-1}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \underset{x\to\pm\infty}{\nexists A.H.}$

- `A. Oblicua:` $\underset{x\to\pm\infty}{\exists A.O.}$ en $y = 2x + 2$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{2}{1} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-1-(2x^2-2x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{2}{1} = 2$$

b) ▪ `Continuidad en` $x = 1$:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\frac{1/x}{1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(ax^2+b) = a+b$
- $f(1) = a+b$

$f(x)$ es continua en $x = 1 \iff \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \implies ⊙\ a+b = 1$

▪ `Continuidad en` $x = 2$:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(ax^2+b) = 4a+b$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(e^x+1) = e^2+1$
- $f(2) = 4a+b$

$f(x)$ es continua en $x = 2 \iff \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \implies ⊛\ 4a+b = e^2+1$

$$\left.\begin{array}{l} ⊙\ a+b=1 \\ ⊛\ 4a+b=e^2+1 \end{array}\right\} \xRightarrow{E_2-E_1} 3a = e^2 \implies \boxed{a = \frac{e^2}{3}} \xRightarrow{a+b=1} \boxed{b = \frac{3-e^2}{3}}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

a) *(1.25 puntos) Un hospital ha determinado que el número de pacientes que hay en urgencias a lo largo de un turno de 36 horas viene dado por la función $P(t)$, donde $t \in [0, 36]$ se expresa en horas. Se sabe que $P'(t) = t^2 - 40t + 231$ es la derivada de $P(t)$ y que al finalizar el turno quedan en urgencias 448 pacientes. ¿En qué momento del turno hay menos pacientes en urgencias? ¿Cuántos pacientes hay en ese momento?*

b) *(1.25 puntos) En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2 €, y el precio de venta de x hogazas, en €, viene dado por la función $P(x) = x \cdot (122 - x)$. Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500 €. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, ¿cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales? ¿A cuánto ascenderían esas ganancias?*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $P(t) = \int P'(t)\,dt = \int \left(t^2 - 40t + 231\right) dt = \dfrac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + C$

$P(36) = 448 \implies \dfrac{36^3}{3} - 20 \cdot 36^2 + 231 \cdot 36 + C = 448 \implies C = 2500$

$P(t) = \dfrac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + 2500$

$P'(t) = t^2 - 40t + 231 = 0 \implies t = \{7, 33\}$

	$(0,7)$	$(7,33)$	$(33,36)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El número de pacientes es *creciente* en $(0.7) \cup (33.36)$ y *decreciente* en $(7, 33)$ y tiene un *mínimo relativo* en $t = 33$ y vale $P(33) = 322$ pacientes. Evaluamos $P(t)$ en $t = 0$ y $t = 36$, pues conforme a la monotonía, es donde también podría estar el mínimo absoluto: $P(0) = 2500$ y $P(36) = 448$.
Por lo tanto el número de pacientes *mínimo absoluto* es de 332 en $t = 33$ horas.

b) Los beneficios de la panadería serán los ingresos menos los gastos. Los ingresos vienen dados por $P(x)$, mientras que los gastos vienen dados por los costes fijos (500 €) y el coste de las x hogazas ($2x$) €.

$B(x) = I(x) - G(x) = x \cdot (122 - x) - (500 + 2x) = -x^2 + 120x - 500$

$B'(x) = -2x + 120 = 0 \implies x = 60$

$B''(x) = -2 \implies B''(60) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máximo

Luego el beneficio máximo es de $B(60) = 3100$ €, vendiendo 60 hogazas.

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

El precio de las lavadoras que se venden en una gran superficie es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 235 €. Para una muestra de 50 lavadoras, escogidas al azar, se obtiene un precio medio de 405 €.

a) (1.25 puntos) Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el precio medio de una lavadora.

b) (1.25 puntos) ¿Cuál es el número mínimo de lavadoras que habría que considerar para que el error cometido al estimar el precio medio por lavadora con un nivel de confianza del 97 % fuese de 50 €?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Precio de las lavadoras (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 235)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 235) \xrightarrow{n=50} \overline{x} = 405 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{235}{\sqrt{50}} = 65.13$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (339.87.62; 470.13)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E \leq 50 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.97$

$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \dfrac{23}{\sqrt{n}} \leq 50 \implies n > \left(2.17 \cdot \dfrac{235}{50}\right)^2 = 104.01 \implies \boxed{n = 105}$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Se tiene una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se extraen al azar dos bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento:

a) *(0.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?*

b) *(0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?*

c) *(0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos bolas extraídas sea negra?*

d) *(0.75 puntos) Si la segunda bola que se extrae es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido blanca?*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$B_I \equiv \text{“La bola } i \text{ extraída es blanca”}$$
$$N_I \equiv \text{“La bola } i \text{ extraída es negra”}$$
$$R_I \equiv \text{“La bola } i \text{ extraída es roja”}$$

a) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{45} = 0.0222$

b) $$P\Big((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2) \cup (R_1 \cap R_2)\Big) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap R_2)$$
$$= P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1) + P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1)$$
$$= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45} = 0.3111$$

c) $$P(\text{“Al menos una negra”}) = 1 - P(\text{“Ninguna negra”}) = 1 - P(\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2)$$
$$= 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = 1 - \frac{7}{15} = 1 - 0.4666 = 0.5333$$

d) $$P(R_2) = P\Big((B_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)\Big) = P(B_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2)$$
$$+ P(R_1 \cap R_2) = P(B_1) \cdot P(R_2 \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(R_2 \mid N_1)$$
$$+ P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{5} = 0.2$$
$$P(B_1 \mid R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(B_1) \cdot P(R_2 \mid B_1)}{P(R_2)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{9} = 0.5555$$