MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2023
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una empresa de 244 trabajadores se compone de operarios, supervisores y gerentes; siendo el número de operarios ocho veces el de gerentes. Además, se sabe que un día en el que faltaron la mitad de los supervisores y el 60 % de los gerentes, el número de operarios fue cuatro veces la suma de los supervisores y los gerentes que se quedaron.

a) (1.25 puntos) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos operarios, cuántos supervisores y cuántos gerentes componenn la empresa.

b) (1.25 puntos) Resuélvalo.

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de operarios”} \\ y &\equiv \text{“Nº de supervisores”} \\ z &\equiv \text{“Nº de gerentes”} \end{aligned}$$

a) Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=244 \\ x=8z \\ x=4\cdot(0.5y+0.4z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=244 \\ x-8z=0 \\ 5x-10y-8z=0 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 1 & 0 & -8 & 0 \\ 5 & -10 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-5F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 0 & -1 & -9 & -244 \\ 0 & -15 & -13 & -1220 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3-15F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 0 & -1 & -9 & -244 \\ 0 & 0 & 122 & 2440 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+64+20=244 \\ \Rightarrow -y-9\cdot 20=-244 \\ \Rightarrow 122z=2440 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=160 \\ y=64 \\ z=20 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Una empresa de alquiler de vehículos necesita ampliar su flota con el objetivo de maximizar beneficios, para lo cual adquiere nuevos utilitarios y deportivos. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 120 *vehículos. Tiene claro que no comprará más de* 90 *utilitarios ni menos de* 10 *deportivos. Además, quiere que el número de utilitarios sea, al menos, el doble del de deportivos. Teniendo en cuenta que al final de su vida útil espera haber obtenido un beneficio de* 25000 € *por cada utilitario y de* 40000 € *por cada deportivo:*

a) (0.75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

c) (0.5 puntos) ¿Cuántos utilitarios y cuántos deportivos debe adquirir la empresa para maximizar el beneficio?

d) (0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de utilitarios"
  $y \equiv$ "Nº de deportivos"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 120 & \rightarrow (0,120) \quad \& \quad (120,0) \\ ② \; x \leq 90 & \rightarrow (90,0) \\ ③ \; y \geq 10 & \rightarrow (0,10) \\ ④ \; x \geq 2y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (40,20) \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

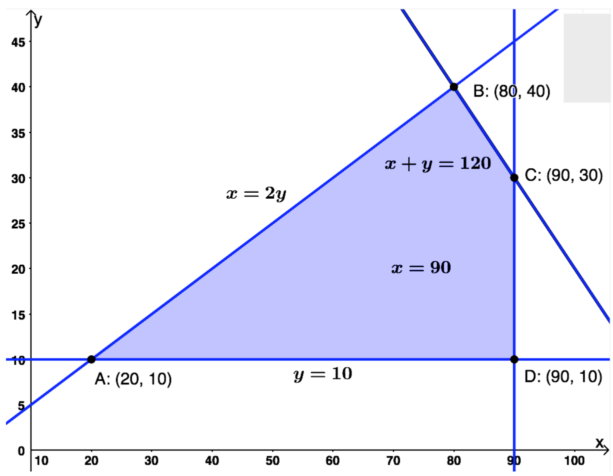
- `Función objetivo` $f(x,y) = 25x + 40y$ (miles €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	10	900
B	80	40	3600
C	90	30	3450
D	90	10	2650

El *beneficio máximo* es de 360000 €, que se obtiene adquiriendo 80 utilitarios y 40 deportivos.



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = x^2 - 2x$

a) (0.5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.

b) (0.5 puntos) ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?

c) (0.5 puntos) Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre f y g.

d) (1 punto) Calcule el área de la región que queda encerrada entre f y g.

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $f'(x) = -2x + 6 = 0 \implies x = 3$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 3)$ y *decreciente* en $(3, +\infty)$

b) $f(x)$ tiene un *máximo relativo*, que también es absoluto, en $(3, 9)$

c) `Corte` OX:
$-x^2 + 6x = 0 \Rightarrow (0, 0)$ & $(6, 0)$
`Corte` OY: $y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

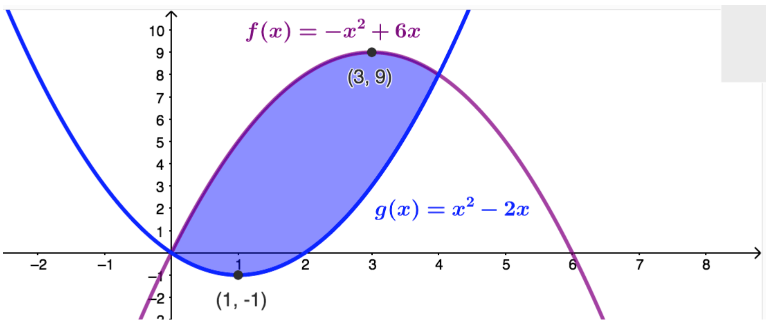
a) $g'(x) = 2x - 2 = 0 \implies x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $g'(x)$	-	+
$g(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $g(x)$ es *creciente* en $(1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-\infty, 1)$

b) $g(x)$ tiene un *mínimo relativo*, que también es absoluto, en $(1, -1)$

c) `Corte` OX:
$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow (0, 0)$ & $(2, 0)$
`Corte` OY: $y = 0 \Rightarrow (0, 0)$



d) $f(x) - g(x) = -x^2 + 6x - (x^2 - 2x) = -2x^2 + 8x = 0 \implies x = \{0, 4\}$

$$Area = \int_0^4 \Big[f(x) - g(x)\Big]\,dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\,dx = -\frac{2x^3}{3} + 4x^2\Bigg]_0^4 = \left(-\frac{128}{3} + 64\right) - 0$$

$$= \frac{64}{3} \simeq 21.33\ u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

a) *(1.25 puntos) Una frutería ha conseguido determinar que el peso total de la fruta que guarda en el almacén, expresado en kilogramos, viene dado por la función* $P(t) = 30t^2 - 240t + 3000$*, donde* $t \in [0, 6]$ *representa las horas transcurridas desde el momento de la apertura. ¿En qué momento hay menos fruta en el almacén? ¿Cuántos kilogramos hay en ese momento?*

b) *(1.25 puntos) En una sastrería familiar, el coste total que supone producir* x *pantalones, en €, viene dado por la función* $C(x) = 120x + 700$*. Por otro lado, el precio de venta de esos* x *pantalones, en €, viene dado por la función* $P(x) = x \cdot (200 - x)$*. Suponiendo que todos los pantalones que se producen se venden, ¿cuántos pantalones habría que producir para que el beneficio obtenido sea máximo?*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $P'(t) = 60t - 240 = 0 \implies t = 4$

	$(0, 4)$	$(4, 6)$
Signo $P'(t)$	-	+
$P(t)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El peso de la fruta en el almacén es *decreciente* en $(0, 4)$ y *creciente* en $(4, 6)$ y tiene un *mínimo relativo*, que también es absoluto en $t = 4$ horas y vale $P(4) = 2520$ kg de fruta.

b) $B(x) = P(x) - C(x) = x \cdot (200 - x) - (120x + 700) = -x^2 + 80x - 700$

$B'(x) = -2x + 80 = 0 \implies x = 40$

$B''(x) = -2 \implies B''(40) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máximo en $x = 40$

Luego el *beneficio máximo* es de $B(40) = 900$ € y se obtiene vendiendo 40 pantalones.

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

a) (1.25 puntos) Con un nivel de confianza del 95 % se ha determinado que el intervalo de confianza para el tiempo medio de vida útil de los microondas que fabrica una cierta marca de electrodomésticos es (8.2 años,9.4 años). Sabiendo que el tiempo de vida útil de estos microondas es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 3.2 años, halle el tamaño mínimo que debe presentar una muestra de microondas, escogidos aleatoriamente, que permita obtener el intervalo de confianza indicado.

b) (1.25 puntos) En un aeropuerto, el tiempo que tarda un viajero en llegar al avión desde que atraviesa el control de seguridad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. A partir de una muestra de 125 viajeros, escogidos al azar, se determinó que el tiempo medio para llegar al avión tras atravesar el control de seguridad es de 16 minutos. Halle el intervalo de confianza para la media de la distribución con un nivel de confianza del 97.5 %.

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Vida útil de los microondas (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3.2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3.2) \xrightarrow{n=?} I.C._{95\,\%}(\mu) = (8.2; 9.4)$

$$E = \frac{9.4 - 8.2}{2} = 0.6$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 0.6 = 1.96 \cdot \frac{3.2}{\sqrt{n}} \implies n = 109.27 \implies \boxed{n = 110}$$

$$Y \equiv \text{“Tiempo en llegar al avión (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

b) $Y : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=125} \overline{x} = 16 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.97$

$$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2}{\sqrt{125}} = 0.388$$

$$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (15.612; 16.388)}$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

El 55 % de los artículos que fabrica una empresa de iluminación son bombillas, el 30 % fluorescentes y el resto halógenos. Tras un análisis en el departamento de calidad se encuentra que el 2 % de las bombillas, el 1 % de los fluorescentes y el 3 % de los halógenos que se producen presenta algún tipo de defecto de fábrica. Si se escoge un producto al azar de los que se producen:

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad dde que sea un fluorescente y no presente ningún defecto de fábrica?

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bombilla y presente algún defecto de fábrica?

c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que presente algún defecto de fábrica?

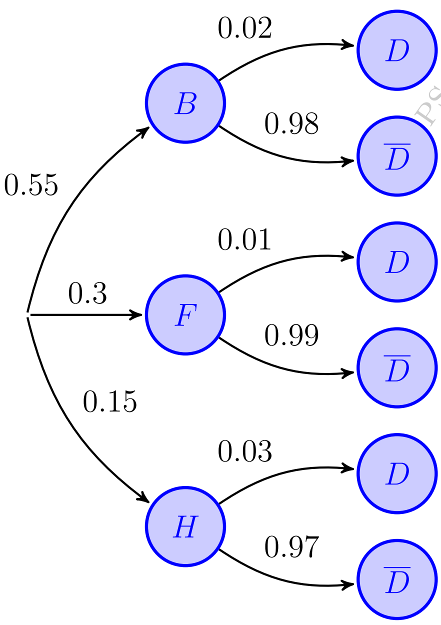
d) (0.75 puntos) Si no presenta ningún defecto de fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un halógeno?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$B \equiv \text{“El artículo fabricado es una bombilla”}$$
$$F \equiv \text{“El artículo fabricado es un fluorescente”}$$
$$H \equiv \text{“El artículo fabricado es un halógeno”}$$
$$D \equiv \text{“El artículo es defectuoso”}$$



a) $P(F \cap \overline{D}) = P(F) \cdot P(\overline{D} \mid F) = 0.3 \cdot 0.99 = 0.297$

b) $P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D \mid B) = 0.55 \cdot 0.02 = 0.011$

c)
$$\begin{aligned} P(D) &= P\big((B \cap D) \cup (F \cap D) \cup (H \cap D)\big) \\ &= P(B \cap D) + P(F \cap D) + P(H \cap D) \\ &= P(B) \cdot P(D \mid B) + P(F) \cdot P(D \mid F) \\ &+ P(H) \cdot P(D \mid H) = 0.55 \cdot 0.02 \\ &+ 0.3 \cdot 0.01 + 0.15 \cdot 0.03 = 0.0185 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} P(H \mid \overline{D}) &= \frac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(H) \cdot P(\overline{D} \mid H)}{1 - P(D)} \\ &= \frac{0.15 \cdot 0.97}{1 - 0.0185} = 0.1482 \end{aligned}$$