MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2023
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En un aeropuerto operan tres lineas aéreas: LAVOLONA, NUBERIA y BRINKEN. El 30 % de las llegadas diarias corresponden a la compañía LAVOLONA, El 25 % a NUBERIA y el resto a BRINKEN. La proporción de vuelos que llegan con retraso es del 5 % para los de LAVOLONA, el 8 % para los de NUBERIA y el 12 % para los de BRINKEN.

a) *(0.5 puntos) Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades.*

b) *(1 punto) Se ha ido a recoger un pasajero al aeropuerto y el avión llega con retraso. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión pertenezca a la compañía NUBERIA?*

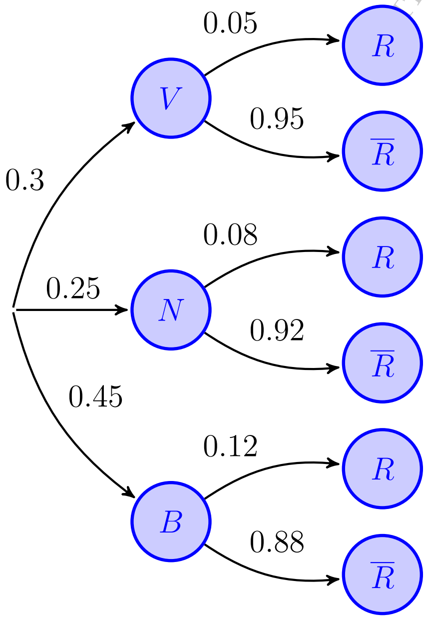
c) *(1 punto) Suponiendo que los retrasos se producen independientemente unos de otros, si los dos próximos aterrizajes corresponden a sendos aviones de la compañía BRINKEN, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos llegue con retraso?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$V \equiv \text{“El vuelo lo opera la compañia LAVOLONA”}$$
$$N \equiv \text{“El vuelo lo opera la compañia NUBERIA”}$$
$$B \equiv \text{“El vuelo lo opera la compañia BRINKEN”}$$
$$R \equiv \text{“El vuelo llega con retraso”}$$



a)
$$\begin{aligned} P(R) &= P\Big((V\cap R)\cup(N\cap R)\cup(B\cap R)\Big) \\ &= P(V\cap R)+P(N\cap R)+P(B\cap R) \\ &= P(V)\cdot P(R\mid V)+P(N)\cdot P(R\mid N) \\ &+ P(B)\cdot P(R\mid B) = 0.3\cdot 0.05 \\ &+ 0.25\cdot 0.08 + 0.45\cdot 0.12 = 0.089 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(N\mid R) &= \frac{P(N\cap R)}{P(R)} = \frac{P(N)\cdot P(R\mid N)}{P(R)} \\ &= \frac{0.25\cdot 0.08}{0.089} = 0.2246 \end{aligned}$$

b) Sea $R_i \equiv$ “El vuelo i se retrasa”

$$\begin{aligned} P(R_1\cup R_2) &= P(R_1)+P(R_2)-P(R_1\cap R_2) \\ &= 0.12+0.12-0.12\cdot 0.12 = 0.2256 \end{aligned}$$

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Según un determinado estudio, la probabilidad de que un cliente realice una compra, en una tienda de un centro comercial, es del $10\,\%$*. En una muestra aleatoria de* 500 *clientes, calcular la probabilidad de que:*

a) (0.75 puntos) Entre 40 *y* 60 *clientes realicen una compra.*

b) (0.75 puntos) Al menos, 435 *clientes no hayan comprado.*

c) (0.5 puntos) Al menos 45 *clientes realicen una compra.*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de clientes que realizan una compra”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(500, 0.1)$$

$$X : \mathcal{B}(500, 0.1) \left\{ \begin{array}{l} n = 500 > 30 \checkmark \\ np = 50 > 5 \checkmark \\ nq = 450 > 5 \checkmark \end{array} \right\} Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(50, 6.71)$$

a) $P(40 \le X \le 60) = P(39.5 \le Y \le 60.5) = P\left(\dfrac{39.5-50}{6.71} \le Z \le \dfrac{60.5-50}{6.71}\right)$

$= P(-1.56 \le Y \le 1.56) = P(Z \le 1.56) - P(Z \le -1.56)$

$= P(Z \le 1.56) - P(Z \ge 1.56) = P(Z \le 1.56) - \Big[1 - P(Z \le 1.56)\Big]$

$= 2 \cdot P(Z \le 1.56) - 1 = 2 \cdot 0.9406 - 1 = 0.8812$

b) $P(\text{Al menos 435 no hayan comprado}) = P(\text{Menos de 65 hayan comprado})$

$P(X < 65) = P(Y < 64.5) = P\left(Z < \dfrac{64.5-50}{6.71}\right) = P(Z < 2.16) = 0.9846$

c) $P(X \ge 45) = P(Y \ge 44.5) = P\left(Z \ge \dfrac{44.5-50}{6.71}\right) = P(Z \ge -0.82) = P(Z \le 0.82)$

$= 0.7939$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

En una muestra de 150 estudiantes, de un determinado grado universitario, 90 utilizan, exclusivamente la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

a) *(0.5 puntos) Determinar la proporción muestral de los estudiantes de ese grado que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.*

b) *(1 punto) Determinar un intervalo de confianza al 99 % para la proporción de estudiantes de ese grado que utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.*

c) *(1 punto) Si se mantiene la proporción muestral del apartado a), para una muestra de 450 estudiantes del referido grado, ¿cuál es el intervalo de confianza al 97 % para la proporción de estudiantes que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)

Solución.

$p \equiv$ "Proporción de estudiantes que utilizan, exclusivamente el campus virtual"

a) $\hat{p} = \dfrac{90}{150} = 0.6 \implies \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0.6 = 0.4$

b) $n = 150 \quad \& \quad \hat{p} = 0.6 \quad \& \quad \hat{q} = 0.4 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.99$

$$1 - \alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1 - \alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{150}} = 0.103$$

$$I.C._{99\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(p) = (0.497; 0.703)}$$

c) $n = 450 \quad \& \quad \hat{p} = 0.6 \quad \& \quad \hat{q} = 0.4 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.97$

$$1 - \alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1 - \alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{450}} = 0.0501$$

$$I.C._{97\,\%}(q) = (\hat{q} - E; \hat{q} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(q) = (0.3499; 0.4501)}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

En una encuesta se pregunta a 10000 jóvenes sobre el número de botellines de cerveza que consumen a la semana resultando una media de 5 botellines y una desviación típica de 2 botellines. Suponiendo que esta variable es normal:

a) (1 punto) Determinar un intervalo de confianza al 80 % para el número medio de botellines consumidos a la semana.

b) (1 punto) Si, para estimar el número medio de botellines de cerveza que consumen a la semana, se admite un error máximo de 0.25 botellines, con un nivel de confianza igual a 0.9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos jóvenes es necesario entrevistar?

c) (0.5 puntos) Si la encuesta se realizara a 8500 jóvenes y se obtuviera la misma media de 5 botellines y, con una confianza del 82 %, se obtuviera el mismo intervalo del apartado a), ¿cuál debería ser la desviación típica?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Botellines consumidos (ud/semana)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=10000} \overline{x} = 5 \quad \& \quad \sigma = 2 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.8$

$1 - \alpha = 0.8 \implies \alpha = 0.2 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.1 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.9 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.285$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.285 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{10000}} = 0.0257$

$I.C._{80\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{80\,\%}(\mu) = (4.9743; 5.0257)}$

b) $n = ? \quad \& \quad E < 0.25 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.9$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0.25 \Rightarrow n > \left(1.645 \cdot \dfrac{2}{0.25}\right)^2 = 173.18 \implies \boxed{n = 174}$

c) $X : \mathcal{N}(5, \sigma) \xrightarrow{n=8500} I.C._{82\,\%}(\mu) = (4.9743; 5.0257) \implies E = 0.0257$

$1 - \alpha = 0.82 \implies \alpha = 0.18 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.09 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.91 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.34$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.34 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{8500}} = 0.0257 \implies \boxed{\sigma = 1.7682}$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Una empresa, que se dedica a la venta de material tecnológico, tiene unos beneficios (en miles de euros) dados por la función:

$$B(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{2} & , \textit{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 5x + 9 & , \textit{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 5 & , \textit{si } x > 4 \end{cases}$$

donde x es el tiempo en años.

a) *(1.25 puntos) Hacer una gráfica de $B(x)$ ¿Es esta función continua? ¿Es derivable?*

b) *(0.75 puntos) ¿Cuándo aumentan y cuándo disminuyen dichos beneficios?*

c) *(0.5 puntos) ¿En qué año o años el beneficio es igual a 3000 euros?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)

Solución.

a) `Continuidad en` $x = 2$

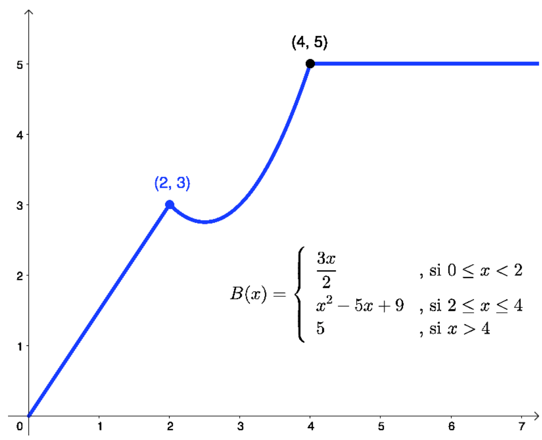
- $\lim\limits_{x \to 2^-} B(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x}{2} = 3$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} B(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 5x + 9) = 3$
- $B(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 9 = 3$

$\lim\limits_{x \to 2} B(x) = B(2) \implies B(x)$ cont. en $x = 2$

`Continuidad en` $x = 4$

- $\lim\limits_{x \to 4^-} B(x) = \lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 5x + 9) = 5$
- $\lim\limits_{x \to 4^+} B(x) = \lim\limits_{x \to 4} 5 = 5$
- $B(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 9 = 5$

$\lim\limits_{x \to 4} B(x) = B(4) \implies B(x)$ cont. en $x = 4$



`Derivabilidad:` $B(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} & , \text{si } 0 < x < 2 \\ 2x - 5 & , \text{si } 2 < x < 4 \\ 0 & , \text{si } x > 4 \end{cases}$

`Derivabilidad en` $x = 2$:

- $\lim\limits_{x \to 2^-} B'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x}{2} = \dfrac{3}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} B'(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x - 5) = -1$

$\lim\limits_{x \to 2^-} B'(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} B'(x)$

$B(x)$ no es derivable en $x = 2$

`Derivabilidad en` $x = 4$:

- $\lim\limits_{x \to 4^-} B'(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x - 5) = -1$
- $\lim\limits_{x \to 4^+} B'(x) = \lim\limits_{x \to 2} 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 4^-} B'(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^+} B'(x)$

$B(x)$ no es derivable en $x = 4$

Por lo tanto $B(x)$ es *continua* en $(0, +\infty)$, mientras que es *derivable* en $(0, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$.

c) `Monotonía de` $B(x)$:

- Si $0 < x < 2 \implies B'(x) = \dfrac{3}{2} > 0 \implies$ *creciente* en $0 < x < 2$
- Si $2 < x < 4 \Rightarrow B(x) = 2x - 5 = 0 \xRightarrow{x={}^5/_2} \begin{cases} \text{Si } x \in (2, {}^2/_5) \xRightarrow{B'(x)<0} \textit{decreciente} \\ \text{Si } x \in ({}^2/_5, 4) \xRightarrow{B'(x)>0} \textit{creciente} \end{cases}$
- Si $x > 4 \implies B'(x) = 0 \implies$ *constante* en $x > 4$

d) $B(x) = 3 \implies \begin{cases} \dfrac{3x}{2} = 3 \implies x = 2 \notin (0, 2) \\ x^2 - 5x + 9 = 3 \implies x = \{2, 3\} \in [2, 4] \\ 5 = 3 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$

Luego en los años 2 y 3 los beneficios ascienden a 3000 €.

————————— ∘ —————————

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Una empresa de juguetes fabrica molinillos de plástico como el que se muestra en la figura 1. Las cuatro aspas del molinillo son iguales. La figura 2 muestra una de estas aspas: por encima está limitada por la parábola $y = -0.24x^2 + 2x + 20$, por la izquierda por el eje de ordenadas, por la derecha por la recta $y = 4x - 24$ y, por debajo, por el eje de abscisas. Las unidades de los ejes se miden en cm.

a) (1.5 puntos) Calcular la superficie total del molinillo (incluyendo el cuadrado central).

b) (1 punto) Cada molinillo se fabrica en plástico, con un coste de fabricación de 1.4 céntimos de euro por cm^2 de superficie, al que se añaden 20 céntimos por el palito que le sirve de soporte. Asimismo, el coste de distribución (transportar los molinillos desde la fábrica a los puntos de venta) es de 24 céntimos por molinillo. ¿A qué precio se debe vender cada molinillo si sé desea que el beneficio total obtenido con la venta (precio de venta menos costes de fabricación y distribución) sea un 20 % del precio de venta?

Figura 1

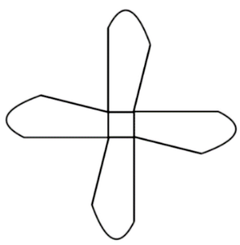
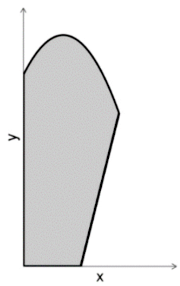


Figura 2



(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque B)

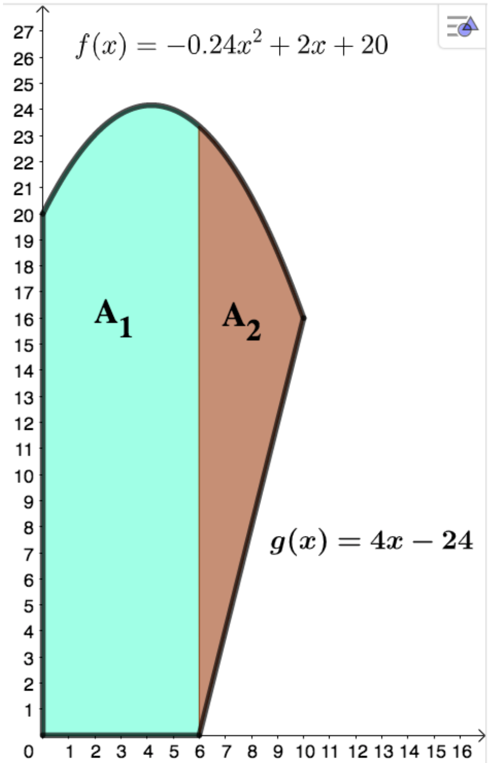
Solución.

a) Sean las funciones:

$$f(x) = -0.24x^2 + 2x + 20 \qquad \& \qquad g(x) = 4x - 24$$

Hallamos los puntos de corte entre f y g

$$-0.24x^2 + 2x + 20 = 4x - 24 \implies x = \{-18.33, 10\}$$



$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 (-0.24x^2 + 2x + 20)\,dx \\
&= -0.08x^3 + x^2 + 20x\Big]_0^6 \\
&= (-17.28 + 36 + 120) - 0 = 138.72 \\
A_2 &= \int_6^{10} \Big[f(x) - g(x)\Big]\,dx \\
&= \int_6^{10} (-0.24x^2 - 2x + 44)\,dx \\
&= -0.08x^3 - x^2 + 44x\Big]_6^{10} \\
&= (-80 - 100 + 440) - (-17.28 - 36 + 264) \\
&= 49.28
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Area_{aspa} &= A_1 + A_2 = 138.72 + 49.28 = 188\ cm^2 \\
Area_{molinillo} &= Area_{\square} + 4Area_{aspa} \\
&= 6^2 + 4 \cdot 188 = 788\ cm^2
\end{aligned}$$

b) Sea $x \equiv$ “Precio de venta del molinillo”

$Coste = 0.014 \cdot 788 + 0.2 + 0.24 = 11.472$

$Beneficio = V - C = x - 11.472 = 0.2x \implies \boxed{x = 14.34\ €}$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Dos modelos de relojes, A y B, se producen en una fábrica en la que hay 12 personas trabajando, cada una de ellas con una jornada laboral de 8 horas diarias. El modelo A se tarda en hacer 3 horas y por él se obtiene un beneficio de 70 euros. El modelo B se tarda en hacer 6 horas y por él se obtiene un beneficio de 160 euros. La producción diaria debe ser como mínimo de 15 relojes, con la condición de que el número de unidades del modelo B sea como máximo la mitad del número de unidades del modelo A.
Para maximizar el beneficio diario:

a) (1 punto) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) (0.5 puntos) Representar la región factible.

c) (1 punto) ¿Cuántos relojes de cada tipo le interesa producir al día para obtener el máximo beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)

Solución.

	Modelo A	Modelo B	Restricción
Tiempo de fabricación (h)	3	6	$\leq 12 \cdot 8$
Beneficio (€)	70	160	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de relojes del modelo A"
  $y \equiv$ "Nº de relojes del modelo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

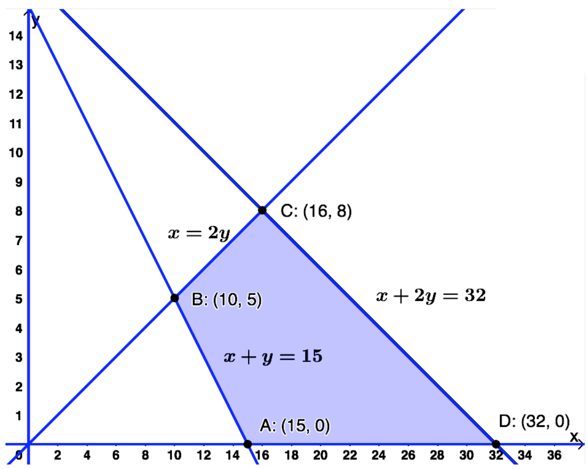
$$\begin{cases} ① \; 3x + 6y \leq 96 \\ ② \; x + y \geq 15 \\ ③ \; y \leq \dfrac{x}{2} \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x + 2y \leq 32 & \to (0,16) \quad \& \quad (32,0) \\ ② \; x + y \geq 15 & \to (0,15) \quad \& \quad (15,0) \\ ③ \; x \geq 2y & \to (0,0) \quad \& \quad (20,10) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 70x + 160y$ (euros)

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	15	0	1050
B	10	5	1500
C	16	8	2400
D	32	0	2240

El *beneficio máximo* es de 2400 €, produciendo 16 relojes del modelo A y 8 del B.



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

En un barrio viven un total de 875 personas clasificadas en tres grupos: niños y jóvenes, adultos y jubilados. La cuarta parte de los adultos es igual al doble de la quinta parte de los niños y jóvenes y por cada 9 jubilados hay 26 del resto.

a) (1.5 puntos) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) (0.75 puntos) Explicando los pasos del método usado, resolver el sistema planteado.

c) (0.25 puntos) ¿Cuántas personas hay en cada grupo?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de niños y jóvenes”} \\ y &\equiv \text{“Nº de adultos”} \\ z &\equiv \text{“Nº de jubilados”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=875 \\ \dfrac{y}{4}=\dfrac{2x}{5} \\ \dfrac{z}{9}=\dfrac{x+y}{26} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=875 \\ 8x-5y=0 \\ 9x+9y-26z=0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 875 \\ 8 & -5 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & -26 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-8F_1 \\ F_3-9F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 875 \\ 0 & -13 & -8 & -7000 \\ 0 & 0 & -35 & -7875 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+400+225=875 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -13y-8\cdot 225=-7000 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -35z=-7000 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=250 \\ y=400 \\ z=225 \end{array}}$$