MATEMATICAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2023

- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En un taller de electricidad de vehículos se reparan coches (45 %), camiones (25 %), guaguas (20 %) y motos (resto). El 10 % de los coches, el 15 % de los camiones, el 9 % de las guaguas y el 12 % de las motos vienen al taller por fallos en el sistema de arranque.

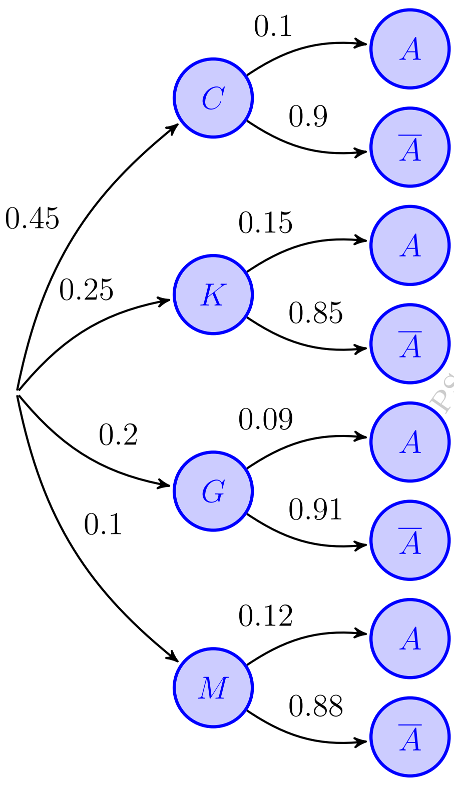
a) *(0.5 puntos) Construir un diagrama de árbol que describa lo anterior.*

b) *(1 punto) Calcular la probabilidad de que se repare en el taller un vehículo que no tenga fallos en el sistema de arranque.*

c) *(1 punto) Si se ha reparado en el taller un vehículo que presentaba fallos en el sistema de arranque, ¿cuál es la probabilidad de que sea una moto?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A)

Solución.



$C \equiv$ "El vehículo reparado es un coche"
$K \equiv$ "El vehículo reparado es un camión"
$G \equiv$ "El vehículo reparado es una guagua"
$M \equiv$ "El vehículo reparado es una moto"
$A \equiv$ "El vehículo tiene un fallo de arranque"

b)
$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= P\Big((C\cap\overline{A})\cup(K\cap\overline{A})\cup P(G\cap\overline{A})\cup P(M\cap\overline{A})\Big) \\ &= P(C\cap\overline{A})+P(K\cap\overline{A})+P(G\cap\overline{A})+P(M\cap\overline{A}) \\ &= P(C)\cdot P(\overline{A}\mid C)+P(K)\cdot P(\overline{A}\mid K) \\ &\quad + P(G)\cdot P(\overline{A}\mid G)+P(M)\cdot P(\overline{A}\mid M) \\ &= 0.45\cdot 0.9+0.25\cdot 0.85+0.2\cdot 0.91+0.1\cdot 0.88 \\ &= 0.8875 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} P(M\mid A) &= \frac{P(M\cap A)}{P(A)} = \frac{P(M)\cdot P(A\mid M)}{1-P(\overline{A})} \\ &= \frac{0.1\cdot 0.12}{1-0.8875} = 0.1067 \end{aligned}$$

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

La probabilidad de que un ave rapaz, que nace en un zoológico, sobreviva más de 5 años, es del 10 %.

a) (0.5 puntos) Si en un zoo tenemos 10 aves rapaces nacidas este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellas sigan vivas dentro de 5 años.

b) (1 punto) Si entre todos los zoológicos del país hay 200 aves rapaces nacidas este mismo año, hallar la probabilidad de que, al cabo de 5 años, hayan sobrevivido más de 10 y menos de 15 de ellas.

c) (1 punto) Se ha hecho un seguimiento de 160 aves rapaces que viven en libertad, observándose que sólo 12 de ellas han sobrevivido más de 5 años. Calcular un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de aves rapaces en libertad que sobreviven más de 5 años.

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de aves que sobrevive más de 5 años”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(n, 0.1)$$

a) $X : \mathcal{B}(10, 0.1)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \Big[P(X = 0) + P(X = 1)\Big]$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9\right] = 1 - 0.7361 = 0.2639$$

b) $$X : \mathcal{B}(200, 0.1) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 200 > 20 \checkmark \\ np = 200 \cdot 0.1 = 20 \checkmark \\ nq = 200 \cdot 0.9 = 180 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{B}(\underbrace{20}_{np}, \underbrace{4.24}_{\sqrt{npq}})$$

$$P(10 < X < 15) = P(10.5 < X < 14.5) = P\left(\frac{10.5 - 20}{4.24} < Z < \frac{14.5 - 20}{4.24}\right)$$

$$= P(-2.24 < Z < -1.3) = P(Z < -1.3) - P(Z < -2.24)$$

$$= P(Z > 1.3) - P(Z > 2.24) = 1 - P(Z < 1.3) - [1 - P(Z < 2.24)]$$

$$= P(Z < 2.24) - P(Z < 1.3) = 0.9875 - 0.9032 = 0.0843$$

c) $n = 160 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{12}{160} = 0.075 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.925 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.075 \cdot 0.925}{160}} = 0.034$$

$$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0.041; 0.109)}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Se realiza un estudio para evaluar qué proporción de los pasajeros en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente. Para ello se toma una muestra de 300 pasajeros, de los cuales se observa que 225 viajan con este descuento.

a) *(1.25 puntos) Determinar un intervalo de confianza, al 96 %, para la proporción de pasajeros que viajan con descuento de residente.*

b) *(0.75 puntos) Usando la proporción de pasajeros con descuento de residencia calculada en esta muestra como estimación de dicha proporción en la población, ¿de qué tamaño debería ser la muestra si se desea construir un intervalo de confianza al 92 % para esa proporción con un error máximo de 0.03.*

c) *(0.5 puntos) Si se pierden los datos de 5 de los pasajeros de la muestra, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos viajara con descuento de residencia?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A)

Solución.

a) $n = 300 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{225}{300} = 0.75 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.25 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.96$

$$1 - \alpha = 0.96 \implies \alpha = 0.04 \implies \alpha/2 = 0.02 \implies 1 - \alpha/2 = 0.98 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.055$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{300}} = 0.0514$$

$$I.C._{96\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{96\,\%}(p) = (0.6986; 0.8014)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E \leq 0.03 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.92$

$$1 - \alpha = 0.92 \implies \alpha = 0.08 \implies \alpha/2 = 0.04 \implies 1 - \alpha/2 = 0.96 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.75$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} \leq 0.03 \implies n \geq \left(\frac{1.75}{0.03}\right)^2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 638.02$$

$$\implies \boxed{n = 639}$$

c) $X \equiv$ "Nº de pasajeros que viajan con descuento" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(5, 0.75)$

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0.75^0 \cdot 0.25^5 = 0.0009$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Un fabricante de televisores afirma que la duración media de su producto es de 10 años. Para verificar esto, se selecciona una muestra aleatoria de 50 televisores y se encuentra que la duración media es de 9.5 años, con una desviación típica de 2 años.

a) (1.25 puntos) Calcular el intervalo de confianza del 88 % para la duración media de los televisores del fabricante.

b) (1.25 puntos) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar la duración media de los televisores con un error menor de 6 meses y con un nivel de confianza del 95 %?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración de los televisores (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=50} \overline{x} = 9.5 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.88$

$1 - \alpha = 0.88 \implies \alpha = 0.12 \implies \alpha/2 = 0.06 \implies 1 - \alpha/2 = 0.94 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.555$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.555 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{50}} = 0.44$

$I.C._{88\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{88\,\%}(\mu) = (9.06; 9.94)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.5 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0.5 \implies n > \left(1.96 \cdot \dfrac{2}{0.5}\right)^2 = 61.47 \implies \boxed{n = 62}$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

El beneficio de una empresa, en miles de euros, a lo largo de 50 años viene dado por:

$$B(t) = \begin{cases} -0.04t^2 + 2.4t & , \text{ para } 0 \leq t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & , \text{ para } 40 \leq t \leq 50 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido (en años).

a) *(0.75 puntos) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $B(t)$ a lo largo de los 50 años.*

b) *(1.25 puntos) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $B(t)$. ¿Cuál es el beneficio máximo y cuándo se produjo?*

c) *(0.5 puntos) Hacer una gráfica de $B(t)$.*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A)

Solución.

a)
- $f_1(x) = -0.04t^2 + 2.4t$ es continua en $\mathbb{R}$ porque es un polinomio.
- $f_2(x) = \dfrac{40t - 320}{t}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, luego continua en $[40, 50]$
- `Continuidad en` $t = 40$:
  - $\lim\limits_{t \to 40^-} B(t) = \lim\limits_{t \to 40} \left(-0.04t^2 + 2.4t\right) = 32$
  - $\lim\limits_{t \to 40^+} B(t) = \lim\limits_{t \to 40} \dfrac{40t - 320}{t} = 32$
  - $B(40) = \dfrac{40 \cdot 40 - 320}{40} = 32$

  Como $\lim\limits_{t \to 40} B(t) = B(40)$, la función es continua en $t = 40$

Por lo tanto la función beneficio $B(t)$ es continua en $\text{Dom}(B) = [0, 50]$

`Derivabilidad:` $B'(t) = \begin{cases} -0.08t + 2.4 & , \text{ para } 0 < t < 40 \\ \dfrac{320}{t^2} & , \text{ para } 40 < t < 50 \end{cases}$

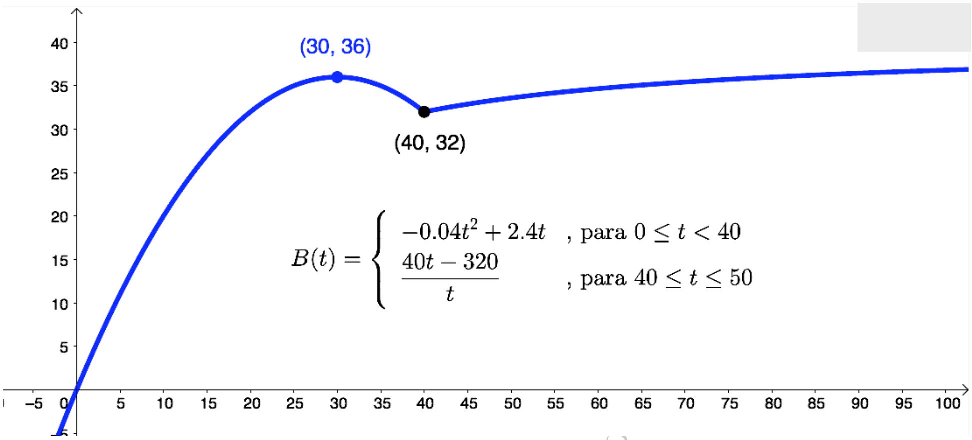
- $B'[40^-] = \lim\limits_{t \to 40^-} B'(t) = \lim\limits_{t \to 40} (-0.08t + 2.4) = -0.8$
- $B'[40^+] = \lim\limits_{t \to 40^+} B'(t) = \lim\limits_{t \to 40} \dfrac{320}{t^2} = 0.2$

Como $B'[40^-] \neq B'[40^+]$, la función no es derivable en $t = 40$, por lo que es derivable en $\mathbb{R} - \{40\}$.

b) $B'(t) = \begin{cases} -0.08t + 2.4 = 0 \implies t = 30 & , \text{ para } 0 < t < 40 \\ \dfrac{320}{t^2} = 0 \implies \nexists \text{Sol.} & , \text{ para } 40 < t < 50 \end{cases}$

	$(0,30)$	$(30,40)$	$(40,50)$
Signo $B'(t)$	$+$	-	$+$
$B(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0,30) \cup (40,50)$ y *decreciente* en $(30,40)$, y tiene un *máximo relativo* en $(30,36)$ y un *mínimo relativo* en $(40,32)$.



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Un joyero quiere revender una lámina de oro cuyos márgenes limitan las funciones $f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = x + 4$. Si se mide en centímetros:

a) (1.25 puntos) Hacer una gráfica de la lámina ¿Cuál es la superficie de la lámina?

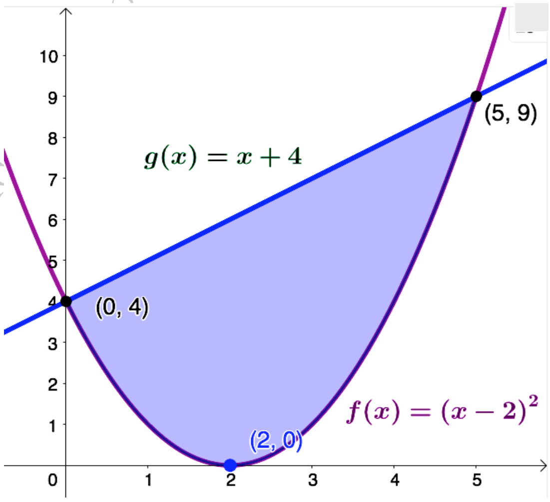
b) (0.75 puntos) Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos, ¿cuántos gramos pesa la lámina?

c) (0.5 puntos) Si el costo de adquisición de la lámina fue de 20 euros por gramo, ¿cuál debe ser el precio que debe poner a cada gramo de oro para tener un beneficio de 625 euros?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque B)

Solución.

a)
- $f(x) = (x-2)^2$ es una parábola *convexa* ($\cup$), que corta al eje OX en $(2, 0)$, que es también su vértice.
- $g(x) = x + 4$ es una recta *creciente* que pasa por $(0, 4)$ y $(-4, 0)$.
- Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$:
  $f(x) = g(x) \implies (x-2)^2 = x + 4$
  $\implies x^2 - 5x = 0 \implies x = \{0, 5\}$



$$Area = \int_0^5 \left[g(x) - f(x)\right] dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)\, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\Bigg]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - 0$$

$$= \frac{125}{6} \simeq 20.83\ cm^2$$

b) $Peso = 2 \cdot Area = 2 \cdot 20.83 = 41.66\ gr$

c) $\mathcal{B} = \mathcal{I} - \mathcal{C} = 41.66p - 20 \cdot 41.66 = 625 \implies \boxed{p = 35\ €/gr}$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una cerrajería se encarga de realizar dos tipos de puertas mixtas, de hierro y madera. Para las puertas tipo TIMANFAYA necesita 2 metros cuadrados de hierro y 2 metros cuadrados de madera, y para las puertas tipo TABURIENTE, necesita 1 metro cuadrado de hierro y 3 metros cuadrados de madera. Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera. La cerrajería obtiene un beneficio de 250 euros por cada puerta tipo TIMANFAYA y, por cada puerta tipo TABURIENTE, obtiene un beneficio de 350 euros.

a) (1 punto) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) (0.5 puntos) Representar la región factible y determinar sus vértices.

c) (1 punto) ¿Cuántas puertas de cada tipo se deben fabricar, con los metros cuadrados de material disponibles en el almacén, para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque A)

Solución.

	Puerta TIMANFAYA	Puerta TABURIENTE	Restricción
Hierro (m^2)	2	1	≤ 1000
Madera (m^2)	2	3	≤ 1500

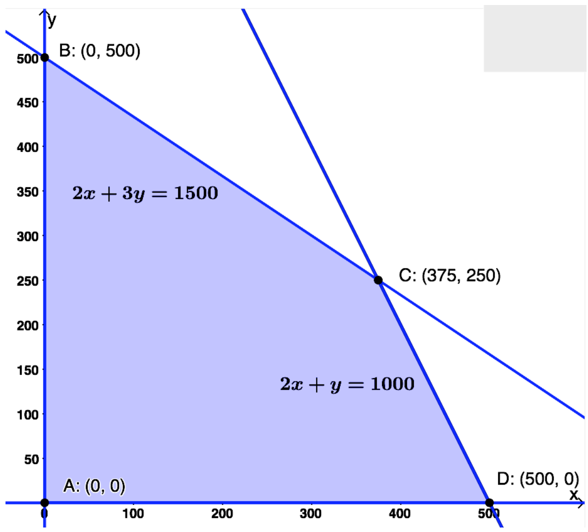
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de puertas de tipo TIMANFAYA"
  $y \equiv$ "Nº de puertas de tipo TABURIENTE"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 2x + y \leq 1000 & \to (0,1000) \quad \& \quad (500,0) \\ ② \ 2x + 3y \leq 1500 & \to (0,500) \quad \& \quad (750,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0.25x + 0.35y$ (miles €)
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	500	175
C	375	250	181.25
D	500	0	125

El *beneficio máximo* es de 181250 € vendiendo 375 puertas tipo TIMANFAYA y 250 tipo TABURIENTE.



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Un avión ofrece asientos de tres clases: primera business y turista. El número de asientos business son el doble que los de primera clases, y por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business. El precio por asiento fue de 350 € para primera clase, 280 € para clase business y 200 € para la clase turista. Si el importe total cobrado por los asientos fue de 31280 €, ¿cuántos asientos de cada clase había en el avión?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Bloque B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Nº de asientos de la clase primera”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de asientos de la clase business”}$$
$$z \equiv \text{“Nº de asientos de la clase turista”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} y = 2x \\ \dfrac{z}{15} = \dfrac{y}{2} \\ 350x + 280y + 200z = 31280 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 15y - 2z = 0 \\ 35x + 28y + 20z = 3128 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 0 \\ 35 & 28 & 20 & 3128 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - 35F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 0 \\ 0 & 91 & 40 & 6256 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 20F_2 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 0 \\ 0 & 391 & 0 & 6256 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x - 16 = 0 \\ \Rightarrow 15 \cdot 16 - 2z = 0 \\ \Rightarrow 391y = 6256 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 8 \\ y = 16 \\ z = 120 \end{array}}$$