MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2023
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- *La empresa A nos cobra 150€ de coste base, y adicionalmente 5€ por cada cliente y 3€ por cada factura que emite.*
- *La empresa B nos cobra 300€ de coste base, 10€ por cada cliente y no cobra por emitir facturas.*
- *La empresa C nos cobra 100€ de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5€ por cada factura que emite.*

a) (3 puntos) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar?
De cara al año que viene tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050€ y la empresa B nos costaría 900€.

b) (5 puntos) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos.

c) (2 puntos) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos: $x \equiv$ "Nº de clientes"

$y \equiv$ "Nº de facturas emitidas"

$$C_A \equiv \text{“Coste empresa } A\text{”} \Longrightarrow C_A = 150 + 5x + 3y$$
$$C_B \equiv \text{“Coste empresa } B\text{”} \Longrightarrow C_B = 300 + 10x$$
$$C_B \equiv \text{“Coste empresa } C\text{”} \Longrightarrow C_C = 100 + 5y$$

a) $C_A = 150 + 5 \cdot 50 + 3 \cdot 180 = 940$ €

$C_B = 300 + 10 \cdot 50 = 800$ €

$C_C = 100 + 5 \cdot 180 = 1000$ €

El menor coste lo proporciona la empresa B con 800 €.

b) Del enunciado tenemos el siguiente sistema que vamos a resolver:

$$\begin{cases} 150 + 5x + 3y = 1050 \xrightarrow{x=60} 150 + 5 \cdot 60 + 3y = 1050 \Longrightarrow \boxed{y = 200} \\ 300 + 10x = 900 \Longrightarrow \boxed{x = 60} \end{cases}$$

c) $C_C = 100 + 5 \cdot 200 = 1100$ €

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- *Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80€ por metro cúbico.*
- *Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100€ por metro cúbico.*
- *Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25€ por metro cúbico.*

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

a) (4 puntos) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables.

b) (4 puntos) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) (2 puntos) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

	Arena	Gravilla	Ceniza	Restricción
Peso (T/m^3)	1.6	1.8	0.5	≤ 18
Precio (€/m^3)	80	100	25	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Volumen de arena (m^3)"
  $y \equiv$ "Volumen de gravilla (m^3)"
  $12-(x+y) \equiv$ "Volumen de ceniza (m^3)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación
  - La capacidad del camión es 12 $m^3 \implies x+y \leq 12$
  - Peso máximo 18 $T \Rightarrow 1.6x+1.8y+0.5\cdot[12-(x+y)] \leq 18 \Rightarrow 11x+13y \leq 120$

$$\begin{cases} ① \ x+y \leq 12 & \rightarrow (0,12) \quad \& \quad (12,0) \\ ② \ 11x+13y \leq 120 & \rightarrow (5,5) \quad \& \quad (10.9,0) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

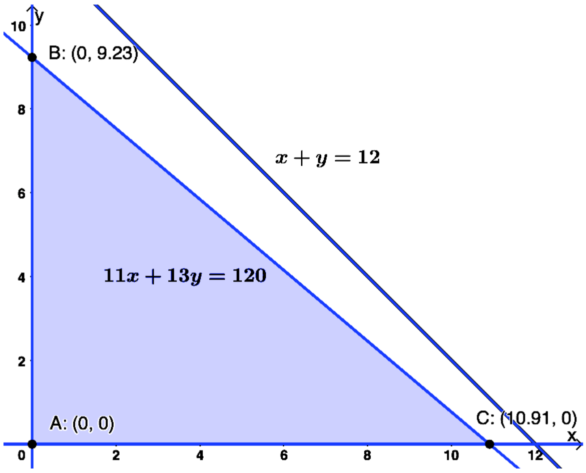
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 80x+100y+25\cdot[12-(x+y)] = 55x+75y+300 \text{ (euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	9.23	992.25
C	10.91	0	900.05

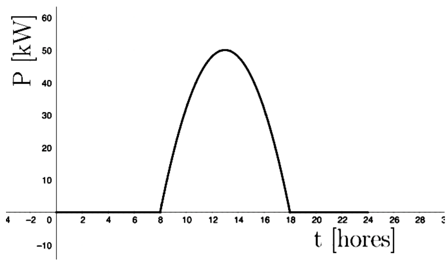


El *precio máximo* es de 992.25€, que se obtiene transportando únicamente 9.23 m^3 de gravilla y $12-(0+9.23) = 2.77\ m^3$ de ceniza. En cuanto a toneladas serían $9.23 \cdot 1.8 = 16.61$ toneladas de gravilla y $2.77 \cdot 0.5 = 1.385$ toneladas de ceniza.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } 0 \le t < 8 \\ -2t^2 + 52t + c & , \text{ si } 8 \le t < 18 \\ 0 & , \text{ si } 18 \le t \le 24 \end{cases}$$



Donde c es un parámetro real.

a) *(3 puntos) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c?*

b) *(3 puntos) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento.*

c) *(4 puntos) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente?*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) `Continuidad en` $t=8$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{t\to 8^-} P(t) = \lim\limits_{t\to 8} 0 = 0 \\ \bullet \lim\limits_{t\to 8^+} P(t) = \lim\limits_{t\to 8}\left(-2t^2+52t+c\right) = 288 + c \\ \bullet\ P(8) = 288 + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} P(t) \text{ continua en } t=8 \\ \iff \lim\limits_{t\to 8} P(t) = P(8) \\ c + 288 = 0 \implies \boxed{c=-288} \end{array}\right.$$

b) `Continuidad en` $t = 18$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{t\to 18^-} P(t) = \lim\limits_{t\to 18}\left(-2t^2+52t+c\right) = 288+c \\ \bullet \lim\limits_{t\to 18^+} P(t) = \lim\limits_{t\to 18} 0 = 0 \\ \bullet\ P(18) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} P(t) \text{ continua en } t=18 \\ \iff \lim\limits_{t\to 18} P(t) = P(18) \\ c+288 = 0 \implies \boxed{c=-288} \end{array}\right.$$

c) $P(13) = -2\cdot 13^2 + 52\cdot 13 - 288 = 50$ Kw

d) Si $8 \leq t < 18 \implies P'(t) = -4t+52 = 0 \implies t = 13 \in [8, 18)$

	$(0,8)$	$(8,13)$	$(13,18)$	$(18,24)$
Signo $P'(t)$	0	+	-	0
$P(t)$	Constante $\leftrightarrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Constante $\leftrightarrow$

La potencia generada por la placa $P(t)$ es *creciente* en $(8,13)$, *decreciente* en $(13,18)$ y *constante* en $(0,8)\cup(18,24)$ y tiene un *máximo relativo* en $(13,50)$, es decir, que en la hora 13 la potencia generada es de 50 kW.

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente:

$$p(m) = 0.1\cdot m^{1.5} \quad , \ m\in(0,+\infty)$$

a) (7 puntos) Haz un gráfico esquemático de la función $p(m)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.

b) (3 puntos) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, $m(p)$ (es decir, aísla la variable m)

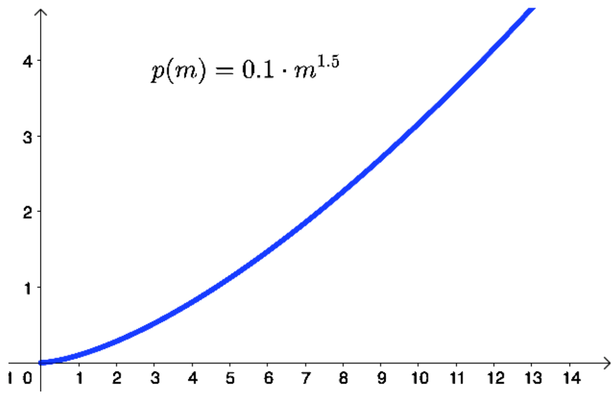
(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a)
- `Dominio:` $\mathrm{Dom}(f) = (0,+\infty)$
- `Comportamiento en los extremos del intervalo:`
  - $\lim\limits_{m\to 0^+} p(m) = \lim\limits_{m\to 0^+} 0.1\cdot m^{1.5} = 0$
  - $\lim\limits_{m\to +\infty} p(m) = \lim\limits_{m\to +\infty} 0.1\cdot m^{1.5} = +\infty$
- `Monotonía de` $p(m)$:

  $p'(m) = 0.15{\cdot}m^{0.5} = 0.15\sqrt{m} = 0 \implies m = 0 \notin \mathrm{Dom}(p) \implies \nexists$ Ptos. Críticos

  $p'(m) > 0\ \forall m \in \mathrm{Dom}(p) \implies p(m)$ es *creciente* en su dominio.



b) $p = 0.1 \cdot m^{1.5} = 0.1 \cdot m^{3/2} \implies 10p = \sqrt{m^3} \implies m^3 = 100p^2 \implies \boxed{m = \sqrt[3]{100p^2}}$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Considera las funciones:

$$f(x) = (x+2)^3 \qquad \& \qquad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$$

a) (4 puntos) Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$.

b) (3 puntos) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$?

c) (3 puntos) Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $f'(x) = 3 \cdot (x+2)^2 = 3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 3x^2 + 12x + 12$
$g'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

b) $f(x) = (x+2)^3 = (x+2) \cdot (x+2)^2 = (x+2) \cdot (x^2+4x+4) = x^3+6x^2+12x+8 \neq g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+6x^2+12x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden ser repetidas.

a) *(3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres?*

b) *(4 puntos) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres?*
Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.

c) *(3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres?*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos: $M_i \equiv$ "La cifra i es múltiplo de 3"

En la resolución de este ejercicio consideramos que 0 es múltiplo de 3, pues $3 \cdot 0 = 0$. De esta forma entre las cifras 0 y 9 hay cuatro múltiplos de tres: $\{0, 3, 6, 9\}$.

a) $P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2) = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{4}{10} = 0.16$

b) $P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) - P(M_1 \cap M_2) = \dfrac{4}{10} + \dfrac{4}{10} - 0.16 = 0.64$

c) $P(\text{“Producto múltiplo de 3”}) = P(\text{“Alguna cifra múltiplo de 3”})$

$$= 1 - P(\text{“Ninguna cifra es múltiplo de 3”}) = 1 - P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \cdots \cap \overline{M_{10}})$$

$$= 1 - \left[P(\overline{M_1}) \cdot P(\overline{M_2}) \cdots P(\overline{M_{10}})\right] = 1 - \Bigg(\underbrace{\frac{6}{10} \cdots \frac{6}{10}}_{10}\Bigg) = 1 - \left(\frac{6}{10}\right)^{10} = 0.99939$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

De un total de $n = 80$ alumnos, el 80 % de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75 % han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50 % ha aprobado el de física.

a) (4 puntos) De los que han suspendido el examen de física, ¿cuántos han aprobado el de matemáticas?

b) (3 puntos) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes?

c) (3 puntos) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{“El estudiante aprueba el examen de Matemáticas”}$$
$$F \equiv \text{“El estudiante aprueba el examen de Física”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(M) = 0.8 \qquad \& \qquad P(F) = 0.75 \qquad \& \qquad P(F \mid \overline{M}) = 0.5$$

a) $P(F \mid \overline{M}) = \dfrac{P(F \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{P(F) - P(M \cap F)}{1 - P(M)} \implies 0.5 = \dfrac{0.75 - P(M \cap F)}{1 - 0.8}$

$\implies P(M \cap F) = 0.65$

$P(M \mid \overline{F}) = \dfrac{P(M \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(M) - P(M \cap F)}{1 - P(F)} = \dfrac{0.8 - 0.65}{1 - 0.75} = 0.6$

$M \mid \overline{F} = 0.6 \cdot \underbrace{80 \cdot 0.25}_{\text{Suspensos Física}} = 12$ alumnos que no aprobaron física aprueban mates

b) $P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) = 0.8 + 0.75 - 0.65 = 0.9$

$\implies M \cup F = 0.9 \cdot 80 = 72$ alumnos han aprobado alguna asignatura

c) $\left.\begin{array}{l} P(M \cap F) = 0.65 \\ P(M) \cdot P(F) = 0.8 \cdot 0.75 = 0.6 \end{array}\right\} \implies \left| \begin{array}{c} P(M \cap F) \neq P(M) \cdot P(F) \\ \text{Los sucesos } M \text{ y } F \text{ no son independientes} \end{array}\right.$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\overline{x}$
75.25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de $\sigma = 20$ años.

a) (4 puntos) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90 % de confianza.
Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de $\mu = 75.25$.

b) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida?

c) (3 puntos) ¿Cual es la probabilidad de que una totrtuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Esperanza de vida de las tortugas (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 20)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=8} \overline{x} = 75.25 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}} = 11.63$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (63.62; 86.88)}$$

$$X \equiv \text{“Esperanza de vida de las tortugas (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(75.25, 20)$$

b) $P(X \geq 80) = P\Big(Z \geq \dfrac{80 - 75.25}{20}\Big) = P(Z \geq 0.24) = 1 - P(Z \leq 0.24) = 1 - 0.5948$
$= 0.4052$

c) $P(80 \leq X \leq 100) = P\Big(\dfrac{80 - 75.25}{20} \leq Z \leq \dfrac{100 - 75.25}{20}\Big) = P(0.24 \leq Z \leq 1.24)$
$= P(Z \leq 1.24) - P(Z \leq 0.24) = 0.8925 - 0.5948 = 0.2977$