MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2023

- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Responda a las siguientes cuestiones:

a) *(5 puntos) Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y la ecuación matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b) *(5 puntos) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $$\underbrace{\underbrace{X}_{m\times n} \cdot \underbrace{B}_{3\times 3}}_{m\times 3} + \underbrace{A}_{2\times 3} = \underbrace{C}_{2\times 3} \implies m = 2 \quad \& \quad n = 3 \implies X \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

$$X \cdot B + A = C \Rightarrow X \cdot B = C - A \Rightarrow X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = (C - A) \cdot B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (C - A) \cdot B^{-1}}$$

$$|B| = -1 \quad \& \quad \operatorname{Adj} B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \& \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - A) \cdot B^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 12 \end{pmatrix}}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\; F_1 \leftrightarrow F_2 \;\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - \lambda - 1 + 3\lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3\lambda + z = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{array} \;,\; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

> *Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4 € y uno del B cuesta 6 €. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?*
>
> *(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

Solución.

	Fertilizante A	Fertilizante B	Restricción
Nitrógeno (ud.)	3	2	≥ 180
Fósforo (ud.)	5	2	≥ 200
Potasio (ud.)	1	2	≥ 80

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de sacos de fertilizante A"
  $y \equiv$ "Nº de sacos de fertilizante B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

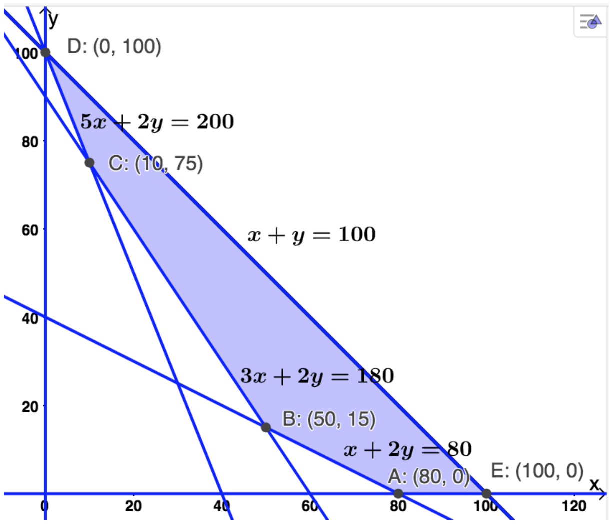
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 100 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (100,0) \\ ② \; 3x + 2y \geq 180 & \rightarrow (0,90) \quad \& \quad (60,0) \\ ③ \; 5x + 2y \geq 200 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (40,0) \\ ④ \; x + 2y \geq 80 & \rightarrow (0,40) \quad \& \quad (80,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 4x + 6y$ (€)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	80	0	320
B	50	15	290
C	10	75	490
D	0	100	600
E	100	0	400



El *gasto mínimo* es de 290 € comprando 50 sacos del fertilizante A y 15 del B.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a) (5 puntos) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b) (5 puntos) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x}$?

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $B(x) = I(x) - C(x) = 400x - (x^2 + 80x + 10000) = -x^2 + 320x - 10000$

$B'(x) = -2x + 320 = 0 \implies x = 160$

$B''(x) = -2 \implies B''(160) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máximo en $x = 160$

Por lo tanto el máximo beneficio se obtiene produciendo y vendiendo 160 unidades de producto y asciende a $B(160) = 15600$ €.

b) $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 80x + 10000}{x} = x + 80 + \dfrac{10000}{x}$

$CM'(x) = 1 - \dfrac{10000}{x^2} = 0 \implies x = \begin{cases} \cancel{x = -100} \text{ Absurdo!} \\ x = 100 \end{cases}$

$CM''(x) = \dfrac{20000}{x^3} \implies CM''(100) = \dfrac{2}{100} > 0 \overset{(\cup)}{\implies}$ Mínimo en $x = 100$

Luego el coste medio por unidad es mínimo para una producción de 100 unidades.

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Dada $f(x) = \dfrac{mx^3 - 1}{x^2}$.

a) (6 puntos) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b) (4 puntos) Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x)\,dx = 4$.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $f'(x) = \dfrac{3mx^2 \cdot x^2 - (mx^3 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{mx^4 + 2x}{x^4} = m + \dfrac{2}{x^3}$

$$f'(-1) = 0 \implies m + \frac{2}{-1} = 0 \implies m - 2 = 0 \implies \boxed{m = 2}$$

$$f''(x) = -\frac{6}{x^4} \implies f''(-1) = -\frac{6}{1} = -6 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo relativo en } x = -1$$

b) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{mx^3 - 1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(mx - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left.\frac{mx^2}{2} + \frac{1}{x}\right]_1^2$

$$= \left(2m + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{m}{2} + 1\right) = \frac{3m}{2} - \frac{1}{2} = 4 \implies 3m - 1 = 8 \implies \boxed{m = 3}$$

Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

Responda a las siguientes cuestiones:

a) (6 puntos) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0.08 y en un día despejado 0.004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

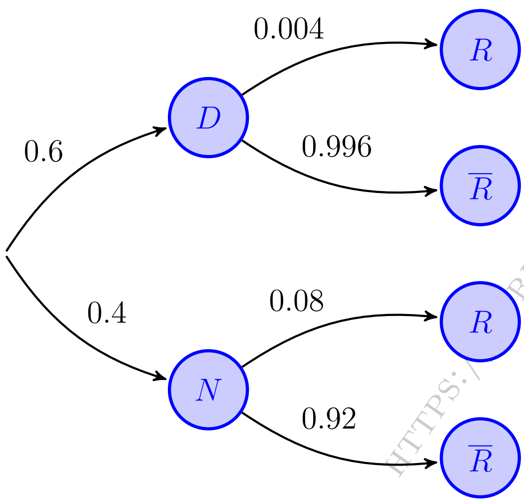
b) (4 puntos) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que:

$$P(A) = \frac{3}{8} \qquad \& \qquad P(B) = \frac{5}{8} \qquad \& \qquad P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Calcule $P(A \cap B)$ & $P(A \mid B)$ & $P(A \cap \overline{B})$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.



a) Sean los sucesos:

$D \equiv$ "El día es despejado"
$N \equiv$ "El día es nublado"
$R \equiv$ "El autobús llega con retraso"

Del enunciado tenemos:

$$P(D) = \frac{12}{20} = 0.6 \quad \& \quad P(N) = \frac{8}{20} = 0.4$$

$$\begin{aligned} P(R) &= P\big((D \cap R) \cup (N \cap R)\big) \\ &= P(D \cap R) + P(N \cap R) \\ &= P(D) \cdot P(R \mid D) + P(N) \cdot P(R \mid N) \\ &= 0.6 \cdot 0.004 + 0.4 \cdot 0.08 = 0.0344 \end{aligned}$$

b) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \implies \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{4}}$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{5/8} \implies \boxed{P(A \mid B) = \frac{2}{5}}$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \implies \boxed{P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}}$$

$$\left.\begin{aligned} P(A) \cdot P(B) &= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \implies \left| \begin{array}{c} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array}\right.$$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3000 *euros.*

a) *(5 puntos) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al* 96 % *para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de* 2000 *euros?*

b) *(4 puntos) En una muestra de* 60 *hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de* 17000 *euros, halle el intervalo de confianza al* 96 % *para la media de dicha variable.*

c) *(1 punto) Si desde una asociación de consumidores se afirma "el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de* 20000 *euros al año". Razone, a la vista del apartado b) si hay motivos para dudar de su afirmación.*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo en alimentación y bebidas (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3000)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 2000 \implies E \leq 1000 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.96$

$$1 - \alpha = 0.96 \implies \alpha = 0.04 \implies \alpha/2 = 0.02 \implies 1 - \alpha/2 = 0.98 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.055$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{3000}{\sqrt{n}} \leq 1000 \Rightarrow n \geq \left(2.055 \cdot \frac{3000}{1000}\right)^2 = 38.007 \implies \boxed{n = 39}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 3000) \xrightarrow{n=60} \overline{x} = 17000 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{3000}{\sqrt{60}} = 795.89$$

$$I.C._{96\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{96\,\%}(\mu) = (16204.11; 17795.89)}$$

c) La afirmación de que el consumo medio es de 20000 € es altamente dudosa pues ese valor no se encuentra dentro del intervalo de confianza calculado con un nivel de confianza del 96 %.