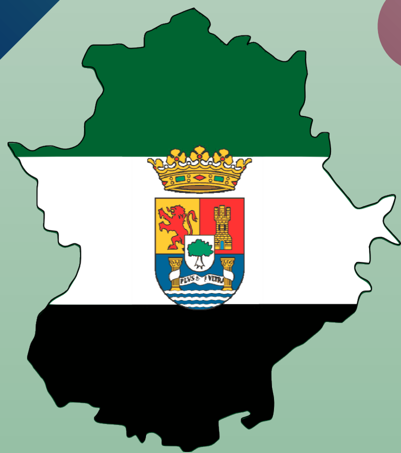
# MATEMATICAS CCSS
# EXAMENES RESUELTOS



# EVAU JUNIO 2023
## - Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

# Junio 2023 (Ordinario)

**Ejercicio 1 (2 *puntos*)**

*Calcular, justificando la respuesta, las matrices $X$ e $Y$ que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:*

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

*(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

**Solución.**

Llamamos a las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Con lo que el sistema queda:

$$\begin{array}{rcl} 2X + 3Y = A & \longrightarrow & 2X + \cancel{3Y} = A \\ 3X - Y = B & \xrightarrow{\times 3} & \underline{9X - \cancel{3Y} = 3B} \\ & & 11X \qquad = A + 3B \Longrightarrow \boxed{X = \frac{1}{11} \cdot (A + 3B)} \\ & & 3X - Y = B \qquad \Longrightarrow \boxed{Y = 3X - B} \end{array}$$

$$X = \frac{1}{11} \cdot (A + 3B) = \frac{1}{11} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \right] \Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$Y = 3X - B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

**Ejercicio 2 (2 *puntos*)**

*Sea $A$ la matriz siguiente:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

*Se pide, justificando las respuestas:*

*a) (1 punto) Determinar para qué valores de $x$ existe la inversa de $A$.*

*b) (1 punto) Para $x = 1$, calcular la matriz $X$ tal que $X \cdot A = I + A$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 3.*

*(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

**Solución.**

a) $|A| = -4x^2 - 4x = -4x \cdot (x+1) = 0 \implies x = \{-1, 0\} \implies \exists A^{-1} \; \forall x \neq \{-1, 0\}$

b) $X \cdot A = I + A \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (I + A) \cdot A^{-1} = A^{-1} + \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} \implies \boxed{X = A^{-1} + I}$

Si $a = 1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -8 \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} + I = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

**Ejercicio 3 (2 *puntos*)**

*Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.*

*(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de habitacionoes sencillas”} \\ y &\equiv \text{“Nº de habitaciones dobles”} \\ z &\equiv \text{“Nº de habitaciones triples”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos

$$\begin{cases} x + y + z = 195 \\ x + 2y = 300 \\ y = 2 \cdot (x + z) \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 195 \\ x + 2y = 300 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 195 \\ 1 & 2 & 0 & 300 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 195 \\ 0 & 1 & -1 & 105 \\ 0 & -3 & 0 & -390 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 130 + 25 = 195 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 130 - z = 105 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y = -390 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 40 \\ y = 130 \\ z = 25 \end{array}}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

## Ejercicio 4 (2 *puntos*)

*Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de* 500 *euros por cada coche y* 400 *euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de* 300000 *euros para comprar vehículos al precio de* 3000 *euros cada coche y* 2000 *euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de* 125 *vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.*

*(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

**Solución.**

| | Coches | Motocicletas | Restricción |
|---|---|---|---|
| Precio Compra (miles €) | 3 | 2 | $\leq 300$ |
| Beneficio (miles €) | 0.5 | 0.4 | |

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de coches comprados"
  $y \equiv$ "Nº de motocicletas comprados"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

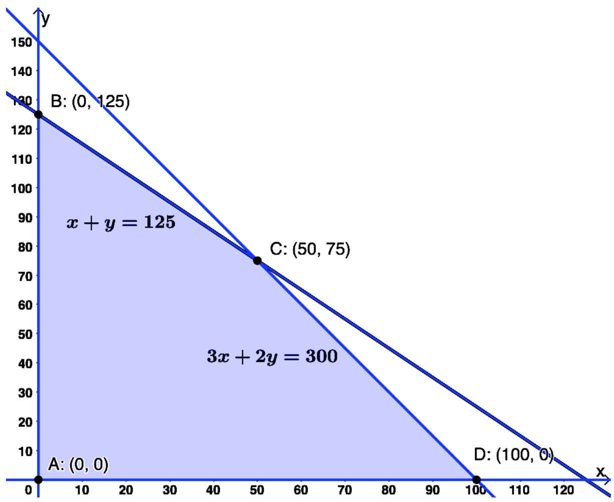
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 125 & \rightarrow (0,125) \quad \& \quad (125,0) \\ ② \; 3x + 2y \leq 300 & \rightarrow (0,150) \quad \& \quad (100,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0.5x + 0.4y$ (miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $f(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 125 | 50 |
| C | 50 | 75 | 55 |
| D | 100 | 0 | 50 |




El *beneficio máximo* es de 55000 €, que se obtiene comprando (y posteriormente vendiendo) 50 coches y 75 motocicletas.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

## Ejercicio 5 (2 *puntos*)

*Los ingresos, $I(t)$, y los gastos, $G(t)$, en euros, de una tienda de paquetería que está abierta desde las 9 hasta las 14 horas depende de la hora del día, según las siguientes expresiones:*

$$I(t) = t^2 + At \quad 9 \le t \le 14 \qquad \& \qquad G(t) = 3At - (A^2 + B) \quad 9 \le t \le 14$$

*a) (0.5 puntos) Calcular la función $B(t)$ que relaciona los beneficios obtenidos con la hora del día.*

*b) (1.5 puntos) Sabiendo que a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros, determinar, justificando la respuest, las constantes $A$ y $B$.*

*(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

**Solución.**

a) $B(t) = I(t) - G(t) = t^2 + At - \left[3At - (A^2 + B)\right]$

$\Longrightarrow \boxed{B(t) = t^2 - 2At + A^2 + B \quad , \ 9 \le t \le 14}$

b) A las 12 horas el *beneficio mínimo* es de 150 € $\Longrightarrow B'(12) = 0 \quad \& \quad B(12) = 150$

$B'(t) = 2t - 2A \xrightarrow{B'(12)=0} 24 - 2A = 0 \Longrightarrow \boxed{A = 12}$

$B(t) = t^2 - 24t + 144 + B \xrightarrow{B(12)=150} 144 - 288 + 144 + B = 150 \Longrightarrow \boxed{B = 150}$

$B''(t) = 2 \Longrightarrow B''(12) = 2 > 0 \xrightarrow{(\cup)}$ Mínimo en $(12, 150)$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

**Ejercicio 6 (2 *puntos*)**

> *El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, $V(t)$, durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, $t$, (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:*
>
> $$V(t) = 60 + 84t - 27t^2 + 2t^3 \quad , \; 0 \leq t \leq 8$$
>
> *Se pide, razonando las respuestas:*
>
> *a) (1.25 puntos) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido.*
>
> *b) (0.75 puntos) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

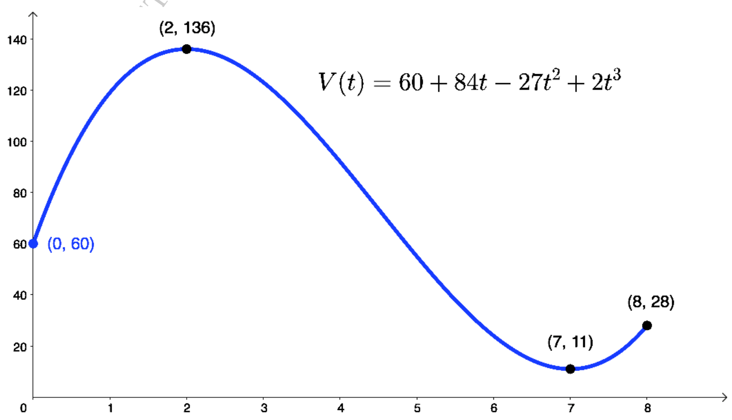
**Solución.**

a) $V'(t) = 84 - 54t + 6t^2 = 0 \implies t = \{2, 7\}$

| | $(0,2)$ | $(2,7)$ | $(7,8)$ |
|---|---|---|---|
| Signo $V'(t)$ | + | - | + |
| $V(t)$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |

El precio de la acción $V(t)$ es *creciente* en $(0,2) \cup (7,8)$ y *decreciente* en $(2,7)$.

b) $V(0) = 60 \qquad \& \qquad V(8) = 28$




HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

**Ejercicio 7 (2 *puntos*)**

*Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje $OX$ entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuesstas.*

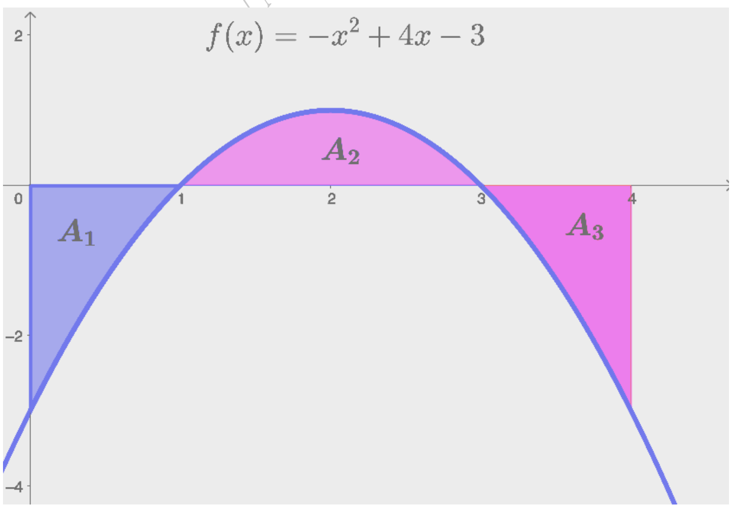
*(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

**Solución.**

$f(x) = -x^2 + 4x - 3 = 0 \implies x = \{1, 3\}$, que entre los valores $x = 0$ y $x = 4$ , definen tres recintos de integración: $A_1 : (0, 1)$, $A_2 : (1, 3)$ y $A_3 : (3, 4)$

$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(-x^2 + 4x - 3\right) dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\Big]_0^1$$
$$= \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right) - 0 = -\frac{4}{3}$$
$$A_2 = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right) dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\Big]_1^3$$
$$= (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$
$$A_3 = \int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 \left(-x^2 + 4x - 3\right) dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\Big]_3^4$$
$$= \left(-\frac{64}{3} + 32 - 12\right) - (-9 + 18 - 9) = -\frac{4}{3}$$
$$Area = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4\ u^2$$

APRENDECONMIGOMELON.COM



**Ejercicio 8 (2 *puntos*)**

*Cierto programa de televisión predice lluvia el 20 % de los días. Si se sabe que el programa ha predicho lluvia, la probabilidad de que realmente llueva es de 0.9. Se pide, justificando las respuestas:*

*a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el programa prediga lluvia y realmente llueva.*

*b) (1 punto) Si se sabe que el 15 % de los días llueve, calcular la probabilidad de que o bien el programa prediga lluvia o bien realmente llueva.*

*(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$P \equiv \text{“El programa predice lluvia”}$$
$$LL \equiv \text{“Realmente llueve”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(P) = 0.2 \qquad \& \qquad P(LL \mid P) = 0.9$$

a) $P(LL \mid P) = \dfrac{P(P \cap LL)}{P(P)} \implies 0.9 = \dfrac{P(P \cap LL)}{0.2} \implies \boxed{P(P \cap LL) = 0.18}$

b) $P(LL) = 0.15$

$P(P \cup Ll) = P(P) + P(LL) - P(P \cap LL) = 0.2 + 0.15 - 0.18 \implies \boxed{P(P \cup LL) = 0.17}$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

**Ejercicio 9 (2 *puntos*)**

> *El tiempo que se emplea en montar un determinado producto en una fábrica se distribuye de acuerdo con una distribución normal con desviación típica* 10 *minutos. Se cronometra el montaje de* 49 *productos, resultando un tiempo medio de* 45 *minutos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del* 90 %*, para el tiempo medio de montaje de dicho producto. Razonar la respuesta.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Tiempo de montaje (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$
$$X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=49} \overline{x} = 45 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{49}} = 2.35$$
$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (42.65; 47.35)}$$

HTTPS://PUEDECONMIGOMMON.COM

**Ejercicio 10 (2 *puntos*)**

> *Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de clubes de fútbol en situación de bancarrota. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor* $P = 0.5$*. Se pide determinar el número mínimo de clubes que hay que examinar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel de confianza del* 95 % *y cuya longitud sea inferior a* 0.1*. Razonar la respuesta.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

**Solución.**

$$n = ? \qquad \& \qquad \hat{p} = 0.5 \qquad \& \qquad 2E < 0.1 \implies E < 0.05 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} < 0.05 \implies n \geq \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 384.16$$
$$\implies \boxed{n = 385}$$