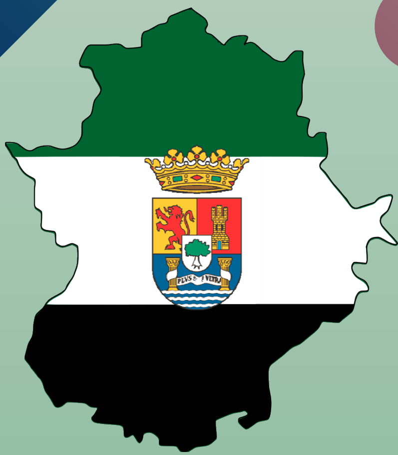
MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2022
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + C = B^\top - 2X$, donde $B^\top$ es la matriz traspuesta de B.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

$$A \cdot X + C = B^\top - 2X \implies A \cdot X + 2X = B^\top - C \implies (A + 2I) \cdot X = B^\top - C$$

$$\underbrace{(A + 2I)^{-1} \cdot (A + 2I)}_{I} \cdot X = (A + 2I)^{-1} \cdot (B^\top - C) \implies \boxed{X = (A + 2I)^{-1} \cdot (B^\top - C)}$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A + 2I| = 1$$

$$(A + 2I)^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^\top - C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A + 2I)^{-1} \cdot (B^\top - C) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -11 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea A la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) (1 punto) Determinar para qué valores de x no existe la matriz inversa de A.

b) (1 punto) Calcular la inversa de A para $x = 2$.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) $|A| = x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = \{1, 3\} \implies \nexists\, A^{-1}\ \forall x = \{1, 3\}$

b) Para $x = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -1 \quad \& \quad \operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \operatorname{Adj} A^{\top} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & -6 & -1 \\ -7 & 6 & -4 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$$

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 3F_2 - F_1 \\ 3F_3 - 4F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 3x + 2 + 1 = -3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 7 = -6 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 9z = 9 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que previamente, ha fabricado necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios así como el valor de dichos beneficios máximos.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

Solución.

	Espejos	Cuadros	Restricciones
Tiempo de elaboración (h)	1	4	≤ 60

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de espejos"
  $y \equiv$ "Nº de cuadros"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

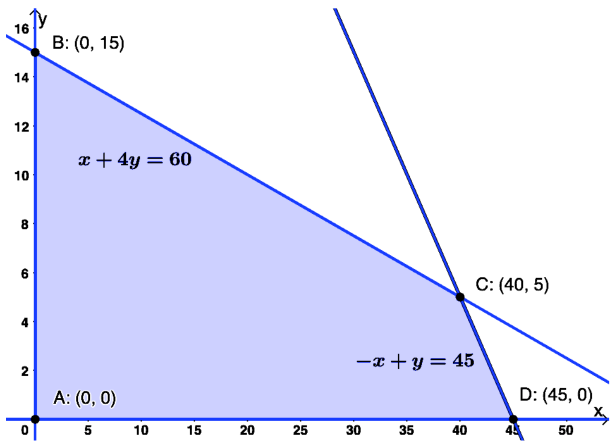
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 45 & \rightarrow (0,45) \quad \& \quad (45,0) \\ ② \; x + 4y \leq 60 & \rightarrow (0,15) \quad \& \quad (60,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 120x + 180y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	15	2700
C	40	5	5700
D	45	0	5400



El *beneficio máximo* es de 5700 € y se produce vendiendo 40 espejos y 5 cuadros.

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Los beneficios de una empresa (en miles de euros) $B(t)$ durante los primeros 10 años dependen del tiempo transcurrido t (en años) desde su creación según la función:

$$B(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 2A & , \textit{si } 1 \leq t < 6 \\ Bt & , \textit{si } 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $B(t)$ es continua y que en el año 8 obtuvo unos beneficios de 16 mil euros.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

- 16000 € de beneficios en el año 8: $B(8) = 16 \implies 8B = 16 \implies \boxed{B = 2}$
- `Continuidad en` $t = 6$
  - $\lim\limits_{t \to 6^-} B(t) = \lim\limits_{t \to 6} \left(t^2 - 8t + 2A\right) = 2A - 12$
  - $\lim\limits_{t \to 6^+} B(t) = \lim\limits_{t \to 6} Bt = 6B$
  - $B(6) = 6B$

  $B(t)$ es continua en $t = 6 \iff \lim\limits_{t \to 6} = B(6) \implies 2A - 12 = 6B \overset{B=2}{\implies} \boxed{A = 12}$

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

El precio de cierto perfume, $P(x)$, (en euros) depende del porcentaje que contiene de la esencia de cierta flor, x, (en tanto por ciento), de acuerdo con la función:

$$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90, \text{ si } 0 \leq x \leq 4$$

Se pide determinar, razonando las respuestas, para qué porcentajes alcanza este perfume sus precios máximo y mínimo y a cuánto ascienden estos precios.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90$

$$P'(x) = 12x^2 - 12x - 24 \implies \begin{cases} \cancel{x = -1} \notin [0,4] \\ x = 2 \in [0,4] \end{cases}$$

	$(0,2)$	$(2,4)$
Signo $P'(x)$	-	+
$P(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El *mínimo mínimo* del perfume se obtiene añadiendo un porcentaje de esencia de $2\,\%$ y valdrá $P(2) = 50$ €.

El *precio máximo* estará en los extremos del intervalo:

$$P(0) = 90 \quad \& \quad P(4) = 166$$

Por lo tanto el *precio máximo* es de 166 € con un porcentaje de esencia de $6\,\%$.

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = -x^2 + x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.*

b) *(1 punto) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:*

$$g(x) = \frac{3 - 2x^2}{-x^2 + x}$$

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

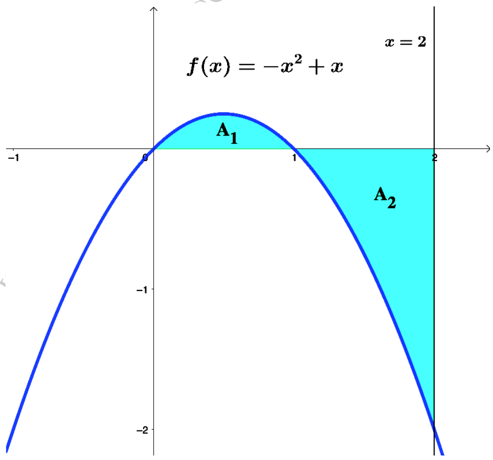
a) $f(x) = -x^2 + x = x \cdot (-x + 1) = 0 \implies x = \{0, 1\}$

Entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$ define dos recintos de integración $A_1 : (0, 1)$ y $A_2 : (1, 2)$

$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(-x^2 + x\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\bigg]_0^1 = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{6}$$

$$A_2 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(-x^2 + x\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\bigg]_1^2 = \left(-\frac{8}{3} + 2\right) - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1\ u^2$$



b) $-x^2 + x = x \cdot (-x + 1) = 0 \implies x = \{0, 1\} \implies \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

- `A. Vertical:`
  - $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 - 2x^2}{-x^2 + x} = \left[\dfrac{3}{0}\right] = \infty$
  - $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3 - 2x^2}{-x^2 + x} = \left[\dfrac{-5}{0}\right] = \infty$

  Luego $\exists$ A. Vertical en $x = 0$ y $x = 1$

- `A. Horizontal:` $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3 - 2x^2}{-x^2 + x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{-2}{-1} = 2 \implies \underset{x \to \pm\infty}{\exists\, A.H.}$ en $y = 2$

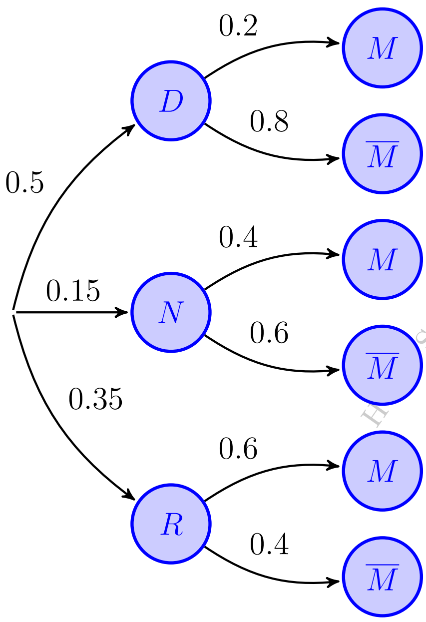
Ejercicio 8 (2 *puntos*)

> *En un quiosco de prensa, el 50 % de los clientes compra prensa deportiva, el 15 % prensa nacional y el resto prensa regional. El 20 % de los clientes de prensa deportiva, el 40 % de los de prensa nacional y el 60 % de los de prensa regional son mujeres. Se pide, razonando la respuesta:*
>
> *a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que un cliente de dicho quiosco sea mujer.*
>
> *b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que un cliente, que sabemos que es un hombre, compre prensa regional.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} D &\equiv \text{“El cliente compra prensa deportiva”} \\ N &\equiv \text{“El cliente compra prensa nacional”} \\ R &\equiv \text{“El cliente compra prensa regional”} \\ M &\equiv \text{“El cliente es mujer”} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{a) } P(M) &= P\big((D\cap M)\cup(N\cap M)\cup(R\cap M)\big) \\ &= P(D\cap M)+P(N\cap M)+P(R\cap M) \\ &= P(D)\cdot P(M\mid D)+P(N)\cdot P(M\mid N) \\ &\quad + P(R)\cdot P(M\mid R) = 0.5\cdot 0.2 \\ &\quad + 0.15\cdot 0.4 + 0.35\cdot 0.6 = 0.37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(R\mid \overline{M}) &= \frac{P(R\cap\overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(R)\cdot P(\overline{M}\mid R)}{1-P(M)} \\ &= \frac{0.35\cdot 0.4}{1-0.37} = 0.2222 \end{aligned}$$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

El contenido de verdura de los botes de una marca de purés para bebés es una variable que se supone con distribución normal con desviación típica 23 *gramos. Se seleccionan al azar* 121 *botes, registrándose el el contenido en verdura de dichos botes, resultando una media de* 146 *gramos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del* 95 %*, para la cantidad media de verduras que contienen dichos botes de puré. Razona la respuesta.*

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

$$X \equiv \text{“Contenido de verdura en el puré (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 23)$$

$$X : \mathcal{N}(\mu, 23) \xrightarrow{n=121} \overline{x} = 146 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{23}{\sqrt{121}} = 4.098$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (141.902; 150.098)}$$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

Una cadena de supermercados tiene en plantilla 3000 *cajeros,* 4000 *reponedores y* 1000 *transportistas. Se desea obtener una muestra de* 200 *trabajadores para una encuesta sobre la satisfacción con el puesto de trabajo. Se pide, razonando las respuestas:*

a) (1 punto) Atendiendo a razones de proporcionalidad, ¿cuántos cajeros, reponedores y transportistas debería seleccionar la empresa para la encuesta?

b) (1 punto) Si 30 *de los cajeros encuestados estaban satisfechos con su trabajo, dar una estimación de la proporción de cajeros satisfechos con su puesto de trabajo.*

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) Total de trabajadores $= 3000 + 4000 + 1000 = 8000$ & Tamaño muestra $= 200$

- Nº Cajeros $= 3000 \cdot \dfrac{200}{8000} = 75$
- Nº Reponedores $= 4000 \cdot \dfrac{200}{8000} = 100$
- Nº Transportistas $= 1000 \cdot \dfrac{200}{8000} = 25$

b) $P(\text{Cajero satisfecho}) = \dfrac{30}{75} = \dfrac{2}{5} = 0.4$

Por lo tanto 2 de cada 5 cajeros están satisfechos con su trabajo. Como hay 3000 cajeros, es de esperar que $3000 \cdot 0.4 = 1200$ estén satisfechos con su trabajo.
