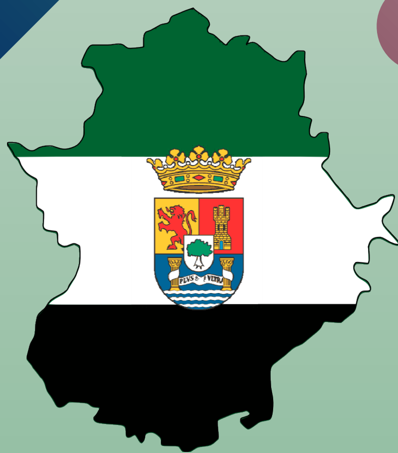
MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2022
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2022 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que cumpla la ecuación matricial $AX - B^\top = C + 3X$, siendo $B^\top$ la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

$$AX - B^\top = C + 3X \implies AX - 3X = C + B^\top \implies (A - 3I) \cdot X = C + B^\top$$

$$\underbrace{(A - 3I)^{-1} \cdot (A - 3I)}_{I} \cdot X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^\top) \implies \boxed{X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^\top)}$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A - 3I| = 1$$

$$(A - 3I)^{-1} = \frac{1}{|A - 3I|} \cdot \mathrm{Adj}(A - 3I)^\top \implies (A - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C + B^\top = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^\top) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Dada la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) (1 punto) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

b) (1 punto) Calcular la inversa de A para $x = 0$.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $|A| = -x^2 + 1 = 0 \implies x = \{-1, 1\} \implies \exists\, A^{-1}\ \forall x \neq \{-1, 1\}$

b) Para $x = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 1 \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\ A^{\top} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 3 \\ x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 3F_2 - F_1 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -9 \\ 0 & -5 & -2 & -9 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 3x - 2 + 4 \cdot 2 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y - 7 \cdot 2 = -9 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -9z = -18 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una pastelería se elaboran pasteles de tipo A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4.5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5.5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos así como el valor de dichos beneficios máximos.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

	Pastel tipo A	Pastel tipo B	Restricciones
Azúcar (gr/ud)	6	4	≤ 240
Levadura (gr/ud)	3	4	≤ 180

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de pasteles de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de pasteles de tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

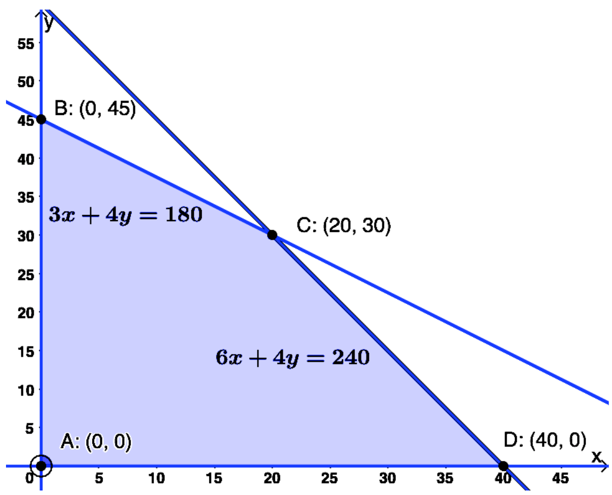
$$\begin{cases} ① \ 6x + 4y \leq 240 & \to (0, 60) \quad \& \quad (40, 0) \\ ② \ 3x + 4y \leq 180 & \to (0, 45) \quad \& \quad (60, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 4.5x + 5.5y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	45	247.5
C	20	30	255
D	40	0	180



El *beneficio máximo* es de 255 € que se obtiene vendiendo 20 pastiles de tipo A y 30 de tipo B.

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

> *El consumo eléctrico de una tienda $C(t)$ (en kilovatios) durante las 8 horas que permanece abierta depende del tiempo t (en horas) desde que abrió según la función:*
>
> $$C(t) = 10 + 6Bt + 6At^2 + t^3$$
>
> *Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que su consumo máximo se alcanza a las 6 horas y asciende a 10 kilovatios.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)*

Solución.

$$C(t) = 10 + 6Bt + 6At^2 + t^3 \quad \& \quad C'(t) = 6B + 12At + 3t^2 \quad \& \quad C''(t) = 12A + 6t$$

- $C(t)$ máx. en $t = 6 \implies C'(6) = 0 \implies 6B+72A+108 = 0 \implies 12A+B = -18 \odot$
- $10\ kw$ de consumo a las 6 horas: $\implies C(6) = 10 \implies 10 + 36B + 216A + 216 = 10$
  $\implies 6A + B = -6 \circledast$

$$\left.\begin{array}{l} \odot 12A + B = -18 \\ \circledast\ 6A + B = -6 \end{array}\right\} \implies 6A = -12 \implies \boxed{A = -2} \xrightarrow{6\cdot(-2)+B=-6} \boxed{B = 6}$$

Comprobamos que para esos valores hay consumo máximo en $(6, 10)$

$$C''(t) = 12 \cdot (-2) + 6t = 6t - 24 \implies C''(6) = 12 > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } t = 6 \text{ !}$$

Por lo tanto no hay ningún valor de A y B que satisfagan las condiciones del enunciado.

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

> *La cantidad de pescado capturado en cierto lago en pequeñas embarcaciones, $P(x)$ (en kg) es una función de la longitud de la embarcación, x que oscila entre 1 y 12 metros. La función que relaciona ambas magnitudes es la siguiente:*
>
> $$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \quad , \text{ si } 1 \leq x \leq 12$$
>
> *Se pide, razonando las respuestas:*
>
> *a) (1 punto) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la cantidad de pescado capturado en función de la longitud de la embarcación utilizada.*
>
> *b) (1 punto) Representar gráfiamente la función $P(x)$.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)*

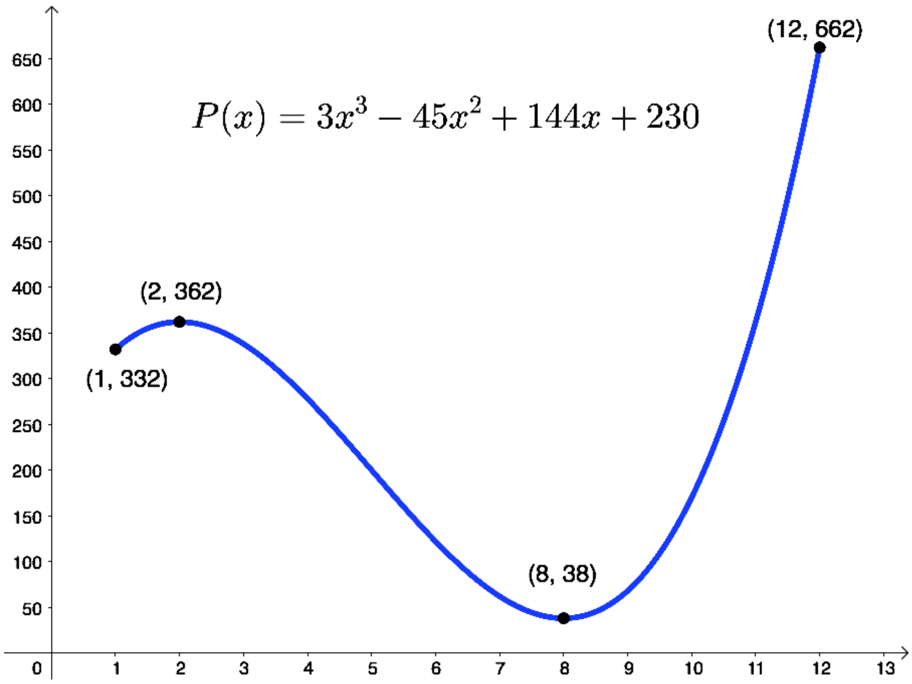
Solución.

a) $P'(x) = 9x^2 - 90x + 144 = 0 \implies x = \{2, 8\}$

	$(1,2)$	$(2,8)$	$(8,12)$
Signo $P'(x)$	+	-	+
$P(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La cantidad de pescado capturado $P(x)$ es *creciente* en $(1,2) \cup (8,12)$ y *decreciente* en $(2,8)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(8,38)$ y un *máximo relativo* en $(2,362)$.

b) Con los datos de monotonía y el valor de $P(t)$ en los extremos del intervalo representamos la función que describe la cantidad de pescado capturado.



Ejercicio 7 (2 *puntos*)

> a) *(1 punto) Determinar, razonando la respuesta, el área en cerrada por la función $f(x) = 4 - x^2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.*
>
> b) *(1 punto) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:*
>
> $$g(x) = \frac{3x^2 + 2}{4 - x^2}$$
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)*

Solución.

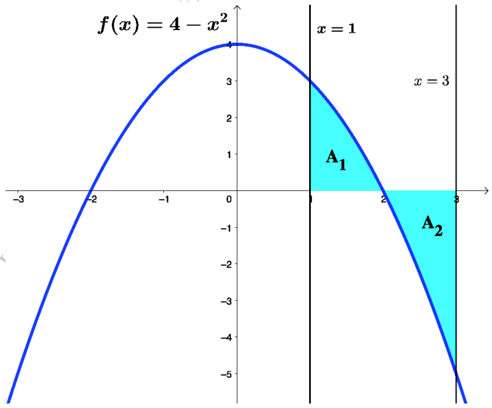
a) $f(x) = 4 - x^2 = 0 \implies x = \{-2, 2\}$

Entre las rectas $x = 1$ y $x = 3$ define dos recintos de integración $A_1 : (1, 2)$ y $A_2 : (2, 3)$

$$A_1 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(4 - x^2\right) dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$$A_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \left(4 - x^2\right) dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_2^3 = (12 - 9) - \left(8 - \frac{8}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = 4\ u^2$$



b) $4 - x^2 = 0 \implies x = \{-2, 2\} \implies \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- `A. Vertical:`
  - $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + 2}{4 - x^2} = \left[\dfrac{14}{0}\right] = \infty$
  - $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 + 2}{4 - x^2} = \left[\dfrac{14}{0}\right] = \infty$

  Luego $\exists$ A. Vertical en $x = -2$ y $x = 2$

- `A. Horizontal:` $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2 + 2}{4 - x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{3}{-1} = -3 \implies \underset{x \to \pm\infty}{\exists\ A.H.}$ en $y = -3$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

Un club de fútbol tiene 200 *abonados de gran antigüedad,* 500 *abonados con varios años de antigüedad y* 300 *nuevos abonados. Se pregunta a los abonados si están de acuerdo con una subida de los precios de los abonos a cambio de que el club ofrezca servicios adicionales. Se muestran favorables a la subida* 80 *abonados de gran antigüedad,* 280 *con varios años de antigüedad y* 120 *nuevos abonados. Se pide, razonando la respuesta:*

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que un abonado sea nuevo y favorable a la subida.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que un abonado que se sabe que es favorable a la subida, tenga una gran antigüedad en el club.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

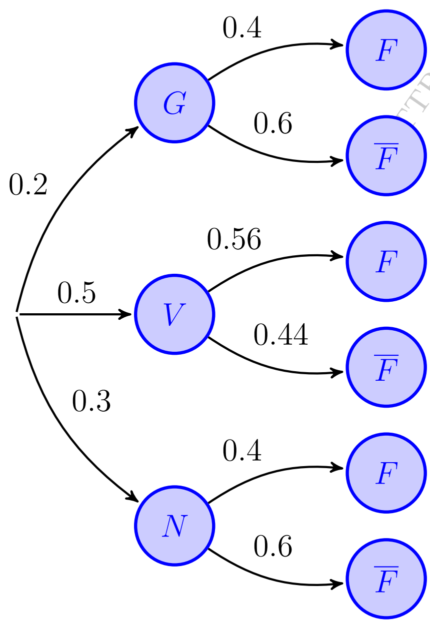
Sean los sucesos:

$G \equiv$ "Abonado de gran antigüedad" $V \equiv$ "Abonado de varios años de antigüedad"
$N \equiv$ "Abonado nuevo" $F \equiv$ "Abonado favorable a la subida"

Calcularmos las probabilidades:

$$P(G) = \frac{200}{1000} = 0.2 \qquad P(V) = \frac{500}{1000} = 0.5 \qquad P(N) = \frac{300}{1000} = 0.3$$

$$P(F \mid G) = \frac{80}{200} = 0.4 \qquad P(F \mid V) = \frac{280}{500} = 0.56 \qquad P(F \mid N) = \frac{120}{300} = 0.4$$



a) $P(N \cap F) = P(N) \cdot P(F \mid N) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$

b) $P(F) = P\big((G \cap F) \cup (V \cap F) \cup (N \cap F)\big)$
$= P(G \cap F) + P(V \cap F) + P(N \cap F)$
$= P(G) \cdot P(F \mid G) + P(V) \cdot P(F \mid V)$
$+ P(N) \cdot P(F \mid N) = 0.2 \cdot 0.4$
$+ 0.5 \cdot 0.56 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.48$

$$P(F \mid G) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{P(F) \cdot P(G \mid F)}{P(G)}$$
$$= \frac{0.2 \cdot 0.4}{0.48} = 0.1666$$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

> *La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío se ajusta a distribución normal con desviación típica 1 tonelada. Con objeto de estimar la producción media de la zona, se registran los datos de 36 parcelas que arrojan una producción media de 8.7 toneladas. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90 %, para la producción media de tomates de las parcelas de la zona. Razonar la respuesta.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)*

Solución.

$$X \equiv \text{“Producción de tomates (toneladas)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1)$$

$$X : \mathcal{N}(\mu, 1) \xrightarrow{n=36} \overline{x} = 8.7 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{1}{\sqrt{36}} = 0.2742$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (8.4258; 8.9742)}$$

Con un nivel de confianza del 90 %, la producción media de tomates está comprendida entre 8425.8 kg. y 8974.2 kg.

—————— ∘ ——————

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

> *Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de hogares españoles con conexión de fibra óptica. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $P = 0.5$. Se pide determinaar el número mínimo de hogares que hay que visitar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel de confianza del 99 % y cuya longitud sea inferior a 0.14. Razonar la respuesta.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2022)*

Solución.

$$n =? \quad \& \quad 2E < 0.14 \Rightarrow E < 0.07 \quad \& \quad \hat{p} = 0.5 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.51 - \alpha = 0.99$$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.005 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} < 0.07 \implies n \geq \left(\frac{2.575}{0.07}\right)^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 338.29$$

$$\implies \boxed{n = 339}$$

—————— ∘ ——————