# MATEMATICAS CCSS
# EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JUNIO 2022
## - Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Junio 2022 (Ordinario)

**Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)**

*Para poder llevar a cabo la última obra que le han encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios en dos suministradores, $A$ y $B$. El suministrador $A$ le ofrece un precio de venta total de 9800 €. El suministrador $B$, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador $A$, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6400 € con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador $A$. Se sabe, además, para el suministrador $A$, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.*

*a) (1 punto) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en €/kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador $A$.*

*b) (1.5 puntos) Resuélvalo.*

*(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*



**Solución.**

a) Sean las incógnitas:

$x \equiv$ "Precio del cenmento ofertado por el suministrador $A$ (€/kg)"
$y \equiv$ "Precio de los ladrillos ofertado por el suministrador $A$ (€/kg)"
$z \equiv$ "Precio de los azulejos ofertado por el suministrador $A$ (€/kg)"

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 400x + 150y + 120z = 9800 \\ \dfrac{1}{2} \cdot 400x + \dfrac{1}{3} \cdot 150y + \dfrac{1}{4} \cdot 120z = 9800 - 6400 \\ z = 2 \cdot (x + y) \end{cases} \implies \begin{cases} 40x + 15y + 12z = 980 \\ 20x + 5y + 3z = 340 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema de ecueciones por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 15 & 12 & 980 \\ 20 & 5 & 3 & 340 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \\ 20F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 15 & 12 & 980 \\ 0 & -5 & -6 & -300 \\ 0 & 25 & -32 & -980 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 5F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 15 & 12 & 980 \\ 0 & -5 & -6 & -300 \\ 0 & 0 & -62 & -2480 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 40x + 15 \cdot 12 + 12 \cdot 40 = 980 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y - 6 \cdot 40 = -300 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -62z = -2480 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 8 \\ y = 12 \\ z = 40 \end{array}}$$

**Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)**

*Con el objetivo de maximizar beneficios, un obrador cántabro amplía su producción diaria máxima hasta las 400 tartas de queso y 900 quesadas, con las que elabora dos tipos de pack, $A$ y $B$. El pack $A$ contiene 4 tartas de queso y 12 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 44 €. El pack $B$ contiene 2 tartas de queso y 3 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 16 €.*

*a) (0.75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describe el problema.*

*b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.*

*c) (0.5 puntos) ¿Cuántos packs de cada tipo debe producir el obrador en un día para que el beneficio obtenido sea máximo?*

*d) (0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?*

*(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

**Solución.**

| | Pack $A$ | Pack $B$ | Existencias |
|---|---|---|---|
| Tartas de queso (ud) | 4 | 2 | $\leq 400$ |
| Quesadas (ud) | 12 | 3 | $\leq 900$ |
| Beneficio (€/pack) | 44 | 16 | $\leq 900$ |

- `Incógnitas` $x \equiv$ “Nº de packs $A$”
  $y \equiv$ “Nº de packs $B$”

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

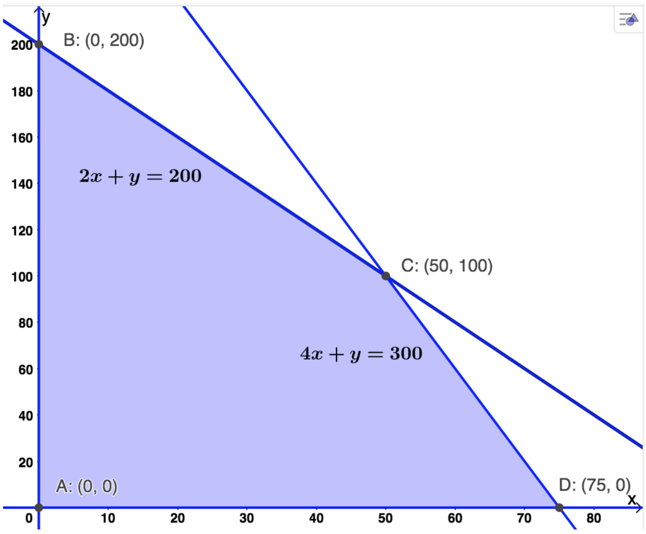
$$\begin{cases} ① \ 4x + 2y \leq 400 \\ ② \ 12x + 3y \leq 900 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 2x + y \leq 200 & \rightarrow (0, 200) \quad \& \quad (100, 0) \\ ② \ 4x + y \leq 300 & \rightarrow (0, 300) \quad \& \quad (75, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 44x + 16y$ (euros)

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $f(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 200 | 3200 |
| C | 50 | 100 | 3800 |
| D | 75 | 0 | 3300 |

El *máximo beneficio* es de 3800 €, vendiendo 50 packs $A$ y 100 packs $B$.



**Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)**

*Dada la función* $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8}$

a) *(1 punto) ¿En qué puntos es discontinua $f$? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?*

b) *(0.25 puntos) ¿Se podría redefinir $f$ para evitar alguna de estas discontinuidades?*

c) *(0.75 puntos) ¿Cuáles son las asíntotas de $f$?*

d) *(0.5 puntos) Esboce la gráfica de $f$, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes $OX$ y $OY$.*

*(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

**Solución.**

a) $x^2 + 2x - 8 = 0 \implies x = \{-4, 2\} \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-4, 2\}$

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to -4} \frac{2\cdot \cancel{(x+4)} \cdot (x-3)}{\cancel{(x+4)}\cdot (x-2)} = \lim_{x\to -4} \frac{2\cdot (x-3)}{x-2} = \frac{7}{3}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \left[\frac{-12}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{-12}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{-12}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

Luego en $x = -4$ hay una *discontinuidad evitable*, mientras que en $x = 2$ hay una *discontinuidad inevitable de salto infinito.*

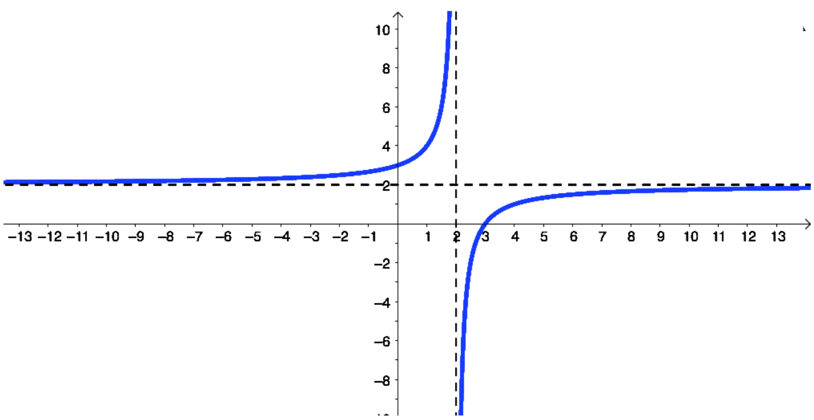
Redefinimos la función $f(x)$ para que sea continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} & , \text{ si } x \neq -4 \\ \dfrac{7}{3} & , \text{ si } x = -4 \end{cases}$$

b)

- `Asíntota Vertical:` $\exists A.V.$ en $x = -2 \implies \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \end{cases}$

- `Asíntota Horizontal:` $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 + 2x - 8} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 2 \Rightarrow \exists A.H.$ en $y = 2$



**Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)**

*Un autónomo del sector del transporte ha determinado que los costes mensuales de su empresa responden a una función $C(v)$, donde $v$ representa el número de vehículos movilizados. Se sabe que la empresa dispone de un total de 36 vehículos y que los costes ascienden a 5000 € si no se moviliza ningún vehículo. Se sabe, además, que $C'(v) = v^2 - 32v + 112$ es la derivada de $C(v)$.*

*a) (1.25 puntos) ¿Cuántos vehículos han de movilizarse para minimizar costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?*

*b) (1.25 puntos) ¿Para qué número de vehículos movilizados serían máximos los costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?*

*(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

**Solución.**

a) $C(v) = \int C'(v)\,dx = \int \left(v^2 - 32v + 112\right) dx = \dfrac{v^3}{3} - 16v^2 + 112v + C$

$$C(0) = 5000 \xRightarrow{C=5000} C(v) = \frac{v^3}{3} - 16v + 112v^2 + 5000, \text{ si } 0 \leq v \leq 36$$

$$C'(v) = 0 \implies v^2 - 32v + 112 = 0 \implies v = \{4, 28\}$$

$$C''(v) = 2v - 32 \implies \begin{cases} C''(4) = -24 < 0 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } v = 4 \\ C''(28) = 24 > 0 \xRightarrow{(\cup)} \text{Mínimo en } v = 28 \end{cases}$$

Miramos el valor de $C(v)$ en los extremos del intervalo:

$$C(0) = 5000 \qquad \& \qquad C(28) = 2909.3 \qquad \& \qquad C(36) = 3848$$

Por lo tanto el *coste mínimo* es de 2909.3 € cuando se movilizan 28 coches.

b) $C(4) = 5213.3$, por lo tanto el *máximo coste* es de 5213.3 € y se produce movilizando 4 vehículos.

**Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)**

*Un agricultor valenciano ha determinado que el peso de sus naranjas sigue una distribución normal con desviación típica de 15 gramos. De una muestra de 100 naranjas escogidas al azar se calcula un peso medio por naranja de 210 gramos.*

*a) (1.25 puntos) Obtenga el intervalo de confianza del 93 % para el peso medio de una naranja.*

*b) (1.25 puntos) ¿Cuál es el número mínimo de naranjas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el peso medio por naranja, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 gramos?*

*(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Peso de las naranjas (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 15)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 210 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.93$

$$1-\alpha = 0.93 \implies \alpha = 0.07 \implies \alpha/2 = 0.035 \implies 1-\alpha/2 = 0.965 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.81$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} = 2.715$$

$$I.C._{93\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{93\,\%}(\mu) = (207.285; 212.715)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 2 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.97$

$$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(2.17 \cdot \frac{15}{2}\right)^2 = 264.87 \implies \boxed{n = 265}$$

## Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

*En una cierta ciudad el* 35 % *del censo vota al partido* $A$*, el* 45 % *al partido* $B$ *y el* 20 % *restante se abstiene. Se sabe, además, que el* 20 % *de los votantes del partido* $A$*, el* 30 % *de los del partido* $B$ *y el* 15 % *de los que se abstienen son mayores de* 60 *años. Si se escoge al azar un ciudadano censado:*

*a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido* $B$ *y tenga como máximo* 60 *años?*

*b) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido* $A$ *y sea mayor de* 60 *años?*

*c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de* 60 *años?*

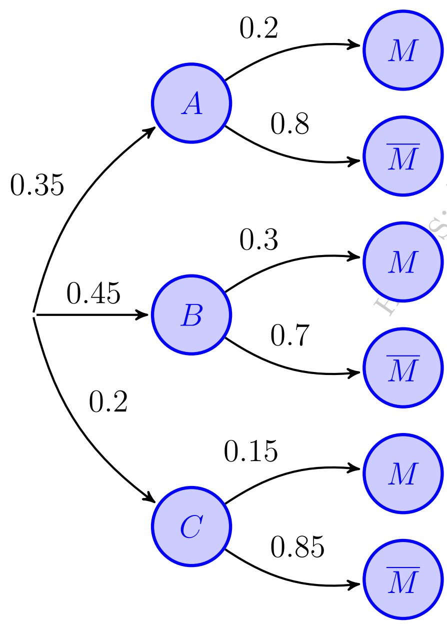
*d) (0.75 puntos) Si es mayor de* 60 *años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?*

*(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El ciudadano vota al partido $A$" $\quad$ $B \equiv$ "El ciudadano vota al partido $B$"
$C \equiv$ "El ciudadano decide abstenerse" $\quad$ $M \equiv$ "El votante tiene más de 60 años"




a) $P(B\cap\overline{M}) = P(B)\cdot P(\overline{M} \mid B) = 0.45\cdot 0.7 = 0.315$

b) $P(A\cap M) = P(A)\cdot P(M \mid A) = 0.35\cdot 0.2 = 0.07$

c) $$\begin{aligned} P(M) &= P\big((A\cap M)\cup(B\cap M)\cup(C\cap M)\big) \\ &= P(A\cap M) + P(B\cap M) + P(C\cap M) \\ &= P(A)\cdot P(M\mid A) + P(B)\cdot P(M\mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(M\mid C) = 0.35\cdot 0.2 \\ &+ 0.45\cdot 0.3 + 0.2\cdot 0.15 = 0.235 \end{aligned}$$

d) $$P(C\mid M) = \frac{P(C\cap M)}{P(M)} = \frac{P(C)\cdot P(M\mid C)}{P(M)} = \frac{0.2\cdot 0.15}{0.235} = 0.12758$$