MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2022
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2022 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20 €. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 €. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 €, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

a) (1.25 puntos) Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.

b) (1.25 puntos) Resuélvalo. Resuélvalo.

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Precio de un helado (€)”} \\ y &\equiv \text{“Precio de un granizado (€)”} \\ z &\equiv \text{“Precio de una horchata (€)”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 20 \\ x + z = 5 \\ 0.5 \cdot (x + y) = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 3z = 20 \\ x + z = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 20 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 4F_2 - F_1 \\ 4F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 4x + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 20 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y + 2 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = -4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350 €, y por cada frisona uno de 500 €. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

a) *(0.75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.*

b) *(1 punto) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.*

c) *(0.5 puntos) ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?*

d) *(0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

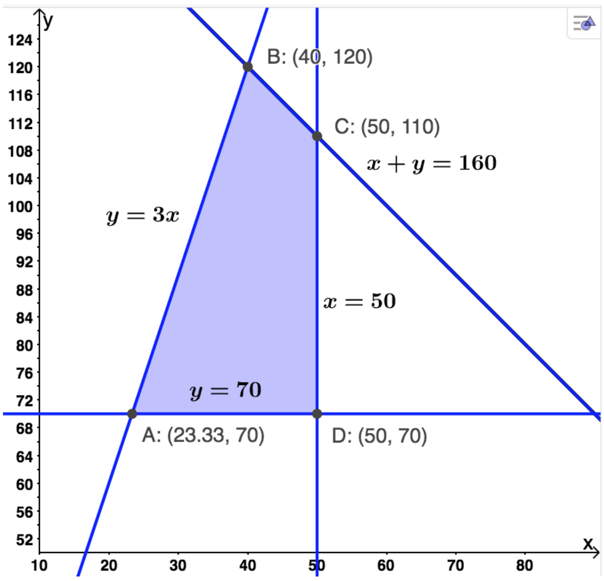
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de vacas pardas"
  $y \equiv$ "Nº de vacas frisonas"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 160 \\ ② \ x \leq 50 \\ ③ \ y \geq 70 \\ ④ \ x \geq \dfrac{y}{3} \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + y \leq 160 & \to (0,160) \quad \& \quad (160,0) \\ ② \ x \leq 50 & \to (50,0) \\ ③ \ y \geq 70 & \to (0,70) \\ ④ \ y \leq 3x & \to (0,0) \quad \& \quad (50,150) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 350x + 500y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	23.33	70	43166.7
B	40	120	74000
C	50	110	72500
D	50	70	52500

El *beneficio máximo* es de 74000 €, vendiendo 40 vacas pardas y 120 frisonas.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 - 2x + 8 \quad \& \quad g(x) = 2x^2 - 2x - 4$

a) *(0.5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.*

b) *(0.5 puntos) ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?*

c) *(0.5 puntos) Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los punots de corte de f y g.*

d) *(1 punto) Calcule el área de la región que queda encerrada entre f y g.*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

$f(x) = -x^2 - 2x + 8$

$f'(x) = -2x - 2 = 0 \implies x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

$g(x) = 2x^2 - 2x - 4$

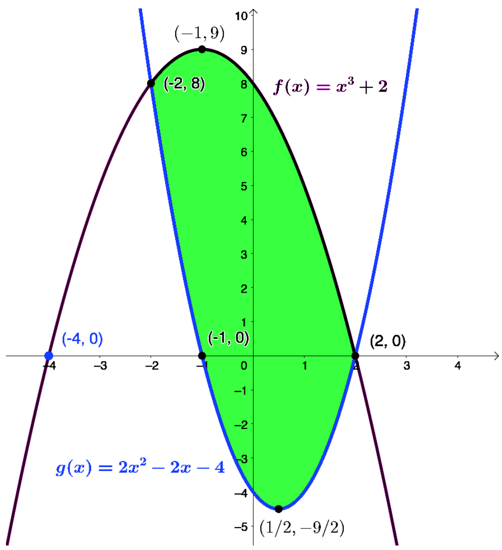
$g'(x) = 4x - 2 = 0 \implies x = 1/2$

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
Signo $g'(x)$	-	+
$g(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

a) $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1)$ y *decreciente* en $(-1, +\infty)$.
$g(x)$ es *creciente* en $(1/2, +\infty)$ y *decreciente* en $(-\infty, 1/2)$.

b) $f(x)$ tiene un *máximo relativo y absoluto* en $(-1, 9)$.
$g(x)$ tiene un *mínimo relativo y absoluto* en $(1/2, -9/2)$.

c)
- `Corte con OX:`
  $f(x) = 0 \implies -x^2 - 2x + 8 = 0$
  $\implies x = \{-4, 2\} \implies (-4, 0)$ y $(2, 0)$
  $g(x) = 0 \implies 2x^2 - 2x - 4 = 0$
  $\implies x = \{-1, 2\} \implies (-1, 0)$ y $(2, 0)$
- `Corte con OY:`
  $f(0) = 8 \implies (0, 8)$
  $g(0) = -4 \implies (0, -4)$
- `Corte entre` $f(x)$ `y` $g(x)$
  $-x^2 - 2x + 8 = 2x^2 - 2x - 4$
  $\implies 3x^2 - 12 = 0 \implies x = \{-2, 2\}$



d) $Area = \int_{-2}^{2} \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_{-2}^{2} \left(-3x^2 + 12\right) dx = -x^3 + 12x\Big]_{-2}^{2}$

$= (-8 + 24) - (8 - 24) = 32\ u^2$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Se sabe que la evolución del precio del oro en el mercado (P, expresado en €/kg) a lo largo de un mes de 31 días viene dado por la siguiente función:

$$P(d) = \frac{1}{3}d^3 - 15d^2 + 144d + 1500 \quad , \text{con } 1 \leq d \leq 31$$

donde d indica el día del mes.

a) *(1 punto) ¿Qué día del mes habría que vender el oro para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia si se vendiesen 4 kg de oro?*

b) *(1 punto) ¿Qué día del mes es el peor para vender oro? ¿Cuál sería la ganancia si se vendiesen los 4 kg de oro ese días?*

c) *(0.5 puntos) Si se viese obligado a vender 1 kg de oro entre los días 20 y 31 del mes y quisiera obtener la máxima ganancia, ¿en qué día lo haría? ¿Cuánto ganaría con la venta?*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $P'(d) = d^2 - 30d + 144 = 0 \implies d = \{6, 24\}$

$$P''(d) = 2d - 30 \implies \begin{cases} P''(6) = -18 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } d = 6 \implies P(6) = 1896 \\ P''(24) = 18 > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo en } d = 24 \implies P(24) = 924 \end{cases}$$

Para calcular el precio máximo absoluto hemos de evaluar la función $P(d)$ en los extremos:

$$P(1) = \frac{4888}{3} \simeq 1629.3 \qquad \& \qquad P(31) = \frac{4438}{3} \simeq 1479.3$$

Por lo tanto el precio máximo que alcanzará el oro será de 1896 €/kg, en el día 6. Si se venden 4 kg se obtendrán $4 \cdot 1896 = 7584$ €.

b) El peor día para vender el oro es el día 24 que se haría a un precio de 924 €/kg. Si vendemos los 4 kg obtendremos $4 \cdot 924 = 3696$ €.

c) Entre el 20 y el 31 el máximo solo puede estar en los extremos del intervalo (ya que el mínimo se produce en $d = 24$).

$$P(20) = \frac{3140}{3} = 1046.7 \qquad \& \qquad P(31) = \frac{4438}{3} \simeq 1479.3$$

Por lo tanto, entre los días 20 y 31 el precio máximo es de 1479 €/kg, en el día 20. Si vendemos 1 kg ganaríamos por tanto 1479 €.

	$(1, 6)$	$(6, 24)$	$(24, 31)$
Signo $P'(d)$	$+$	-	$+$
$P(d)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

La enóloga de una bodega ha determinado que el porcentaje de alcohol presente en sus botellas de vino sigue una distribución normal con una desviación típica de 0.53 %*. Una muestra de* 120 *botellas, escogidas al azar, arroja un valor promedio para el porcentaje de alcohol por botella de* 12.05 %*.*

a) (1.25 puntos) Obtenga el intervalo de confianza del 95 % *para el valor promedio del porcentaje de alcohol por botella.*

b) (1.25 puntos) ¿Cuál es el número mínimo de botellas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de alcohol por botella, con un nivel de confianza del 97.5 %*, fuese de* 0.1 %*?*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

$$X \equiv \text{“Alcohol en una botella de vino (\%)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0.53)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.53) \xrightarrow{n=120} \overline{x} = 12.05 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{0.53}{\sqrt{120}} = 0.095$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (11.955; 12.145)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.975$

$1-\alpha = 0.975 \Rightarrow \alpha = 0.025 \Rightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.0125 \Rightarrow 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.9875 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.24$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.24 \cdot \dfrac{0.53}{\sqrt{n}} < 0.1 \implies n > \left(2.24 \cdot \dfrac{0.53}{0.1}\right)^2 = 140.94 \implies \boxed{n = 141}$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

El 65 % de los clientes de un cierto supermercado compra leche de origen animal, el 25 % compra leche de origen vegetal y el 10 % restante no compra leche de ningún tipo. Además, el 20 % de los que compran leche de origen animal, el 70 % de los que compran leche de origen vegetal y el 10 % de los que no compran leche de ningún tipo compran también galletas de soja. Si se escoge al azar un cliente del supermercado.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen animal y galletas de soja?

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal y no compre galletas de soja?

c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que compre galletas de soja?

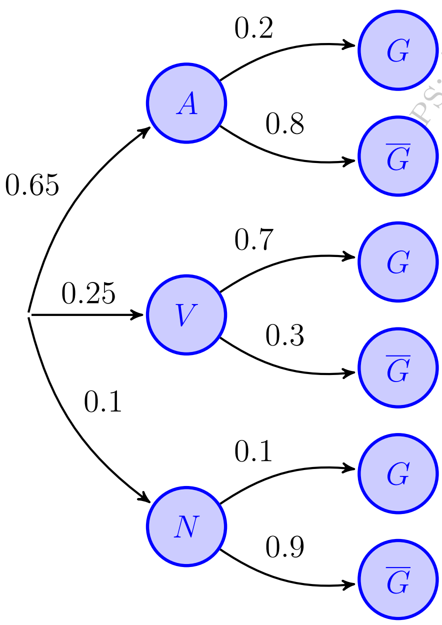
d) (0.75 puntos) Si no compra galletas de soja, ¿cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El cliente compra leche de origen animal”}$$
$$V \equiv \text{“El cliente compra leche de origen vegetal”}$$
$$N \equiv \text{“El cliente no compra leche”}$$
$$G \equiv \text{“El cliente compra galletas de soja”}$$



a) $P(A \cap G) = P(A) \cdot P(G \mid A) = 0.65 \cdot 0.2 = 0.13$

b) $P(V \cap \overline{G}) = P(V) \cdot P(\overline{G} \mid V) = 0.25 \cdot 0.3 = 0.075$

c)
$$\begin{aligned} P(G) &= P\big((A \cap G) \cup (V \cap G) \cup (N \cap G)\big) \\ &= P(A \cap G) + P(V \cap G) + P(N \cap G) \\ &= P(A) \cdot P(G \mid A) + P(V) \cdot P(G \mid V) \\ &+ P(N) \cdot P(G \mid N) = 0.65 \cdot 0.2 \\ &+ 0.25 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.1 = 0.315 \end{aligned}$$

d)
$$P(V \mid \overline{G}) = \frac{P(V \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{P(V) \cdot P(\overline{G} \mid V)}{1 - P(G)} = \frac{0.25 \cdot 0.3}{1 - 0.315} = 0.1095$$