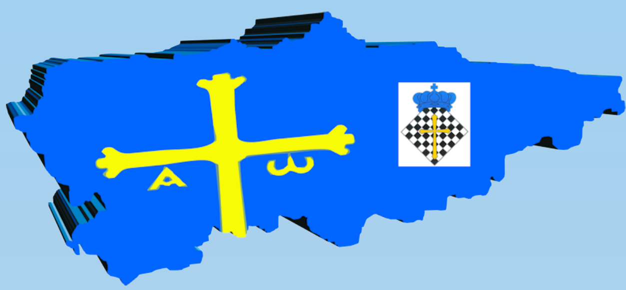
MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2023
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \& \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Si* $\frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B \cdot C = D$*, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por* x *e* y*) en función del parámetro* m*.*

b) *(1.5 puntos) ¿Para qué valores de* m *el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es única? Resuelve el sistema para* $m = -2$*.*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $M = \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}_{A^2} \cdot \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B}_{M} \cdot C = D \implies \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases}$$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{array}\right) \implies |M| = 1 - m^2 = 0 \implies m = \pm 1$

- Si $m \neq \pm 1$ $\quad |M| \neq 0 \implies \text{ran}(M) = 2 = \text{ran}(M^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow[Rouche]{Th.}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -1 \implies M/M^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|M| = 0 \implies \text{ran}(M) < 2$ y como $|1| \neq 0 \implies \text{ran}(M) = 1$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(M^*) = 2 \neq \text{ran}(M) \xRightarrow[Rouche]{Th.}$ Sist. Incomp. ($\nexists$ Sol.)

- Si $m = 1 \implies M/M^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|M| = 0 \implies \text{ran}(M) < 2$ y como $|1| \neq 0 \implies \text{ran}(M) = 1$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ran}(M^*) = 1 = \text{ran}(M) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 2 \xRightarrow[R.]{Th.}$ S.C.I. (∞ Sol.)

c) Resolvemos el sistema para $m = -2$ por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[F_2 + 2F_1 \right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 2\cdot(-1) = 1 \\ \Rightarrow -3y = 3 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los costes y la audiencia estimada por anuncio se muestran a continuación:

	TELEVISION	*RADIO*
Audiencia por anuncio	100000	18000
Coste por anuncio	2100€	300€

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50 % de los anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10 % de los anuncios totales. Por otro lado se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24000€.

a) *(1.75 puntos) ¿Cuántos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?*

b) *(0.75 puntos) Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de anuncios en televisión"
  $y \equiv$ "Nº de anuncios en radio"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

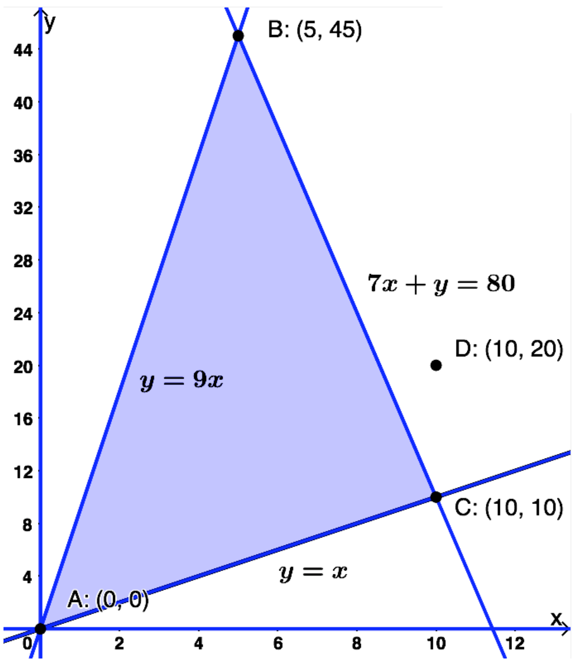
$$\begin{cases} ① \ y \geq 0.5 \cdot (x+y) \\ ② \ x \geq 0.1 \cdot (x+y) \\ ③ \ 2100x + 300y \leq 24000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ y \geq x & \to (0,0) \quad \& \quad (10,10) \\ ② \ y \leq 9x & \to (0,0) \quad \& \quad (2,18) \\ ③ \ 7x + y \leq 80 & \to (0,80) \quad \& \quad (10,10) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo:`
  $$f(x,y) = 100x + 18y \text{ (miles)}$$

- `Región factible:` No se puede hacer 10 anuncios de TV y 20 de radio pues $D : (10, 20)$ no es de la región factible.

- `Optimización de F.O.`

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	5	45	1310
C	10	10	1180



La *máxima audiencia* es de 1310000 contratando 5 aununcios de TV y 45 de radio.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas. El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + ax & , \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 100 + 10x + bx^2 & , \text{si } 3 < x \leq 10 \end{cases}$$

a) *(0.75 puntos) Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas el bemeficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.*

b) *(1.75 puntos) Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[1, 10]$. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $f(3) = 112 \implies 22 + 3a = 112 \implies \boxed{a = 30}$

- `Continuidad en` $x = 3$:
  - $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (22 + ax) = 112$
  - $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (100 + 10x + bx^2) = 130 + 9b$
  - $f(3) = 112$

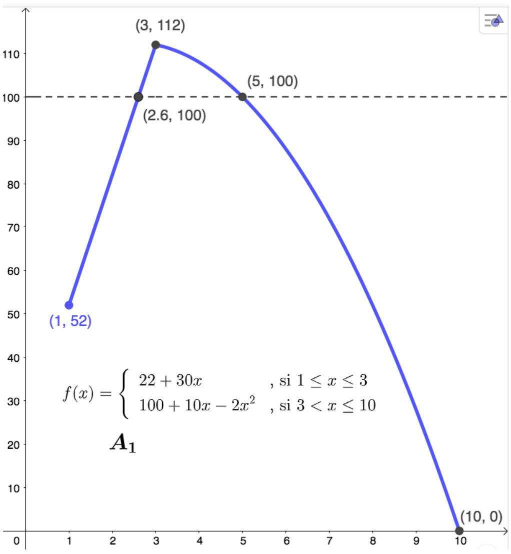
  $f(x)$ es continua en $x = 3 \iff \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \xRightarrow{130+9b=112} \boxed{b = -2}$

b) Para $a = 30$ y $b = -2 \implies f(x) = \begin{cases} 22 + 30x & , \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 100 + 10x - 2x^2 & , \text{si } 3 < x \leq 10 \end{cases}$

- $f_1(x) = 22 + 30x$ es una recta creciente que pasa por $(1, 52)$ y $(3, 112)$
- $f_2(x) = 100 + 10x - 2x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$), que corta al eje X en $(-7.5, 0)$ y $(10, 0)$ con vértice en $x_v = -10/-4 = 5/2$
- $f_1(x) = 22 + 30x = 100 \xRightarrow{x=13/5} (2.6, 100)$

  $f_2(x) = 100 + 10x - 2x^2 = 100 \xRightarrow{x=5} (5, 100)$

  Luego se obtiene un beneficio de 100000€ produciendo 2.6 o 5 toneladas.
  El *beneficio mínimo* es de 0€, produciendo 10 toneladas, mientras que el *beneficio máximo* es de 112000€, produciendo 3 toneladas.



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, se pide:

a) *(0.5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 2$.*

b) *(2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 3$.*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

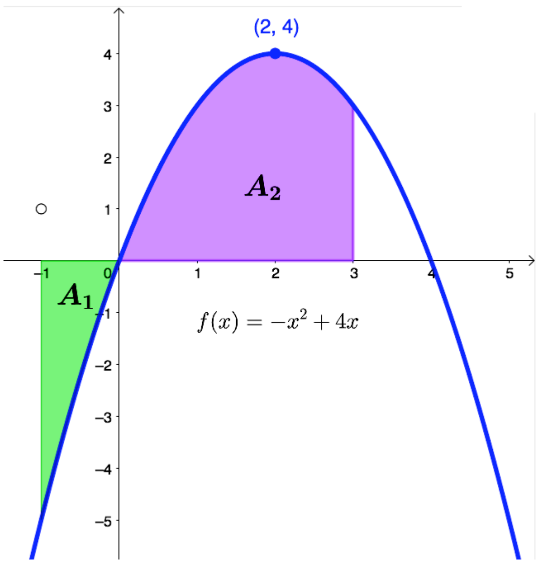
a) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(-x^2 + 4x\right)dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + C$

$$\xrightarrow{F(1)=2} -\frac{1}{3} + 2 + C = 2 \implies C = \frac{1}{3} \implies \boxed{F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + \frac{1}{3}}$$

b) Se trata de una parábola cóncava ($\cap$).

- `Cortes con los ejes`
  - `Eje X:` $f(x) = -x \cdot (x-4) = 0 \implies x = \{0, 4\} \implies (0,0)\ \&\ (4,0)$
  - `Eje Y:` $x = 0 \implies y = 0 \implies (0,0)$
- `Vértice:` $x_v = -\frac{4}{-2} = 2 \implies y_v = f(2) = 4 \implies (2,4)$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-x^2 + 4x)\,dx$$
$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2\Big]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3} + 2\right) = \frac{7}{3}$$
$$A_2 = \int_{0}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{3} (-x^2 + 4x)\,dx$$
$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2\Big]_{0}^{3} = (-9 + 18) = 9$$
$$Area = |A_1| + |A_2| = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3} \simeq 11.33\ u^2$$



Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Según cierto estudio, se sabe que el 80 % de los hogares de un determinado país tiene contratado el acceso a internet y que el 40 % tiene contratado algún canal de televisión de pago. Además se sabe que el 25 % de los hogares disponen de ambos servicios. Si se selecciona un hogar al azar:

a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga contratada televisión de pago, pero no internet?

b) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$I \equiv \text{“El hogar tiene contratado el acceso a internet”}$$
$$T \equiv \text{“El hogar tiene contratado televisión de pago”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(I) = 0.8 \qquad \& \qquad P(T) = 0.4 \qquad \& \qquad P(I \cap T) = 0.25$$

a) $P(T \cap \overline{I}) = P(T) - P(I \cap T) = 0.4 - 0.25 \implies \boxed{P(T \cap \overline{I}) = 0.15}$

b) $P(\overline{I} \cap \overline{T}) = P(\overline{I \cup T}) = 1 - P(I \cup T) = 1 - \left[P(I) + P(T) - P(I \cap T)\right]$

$= 1 - (0.8 + 0.4 - 0.25) \implies \boxed{P(\overline{I} \cap \overline{T}) = 0.05}$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

En una determinada población , el 5 % de los individuos han contraído un virus. Para estudiar dicha enfermedad se somete a los individuos a un cribado consistente en una prueba que determina que tiene virus el 90 % de las veces si el individuo está infectado y determina que no tiene virus el 95 % de las veces si no está infectado. Se pide:

a) (1.25 puntos) Si la prueba determina que un individuo tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente no lo tenga?

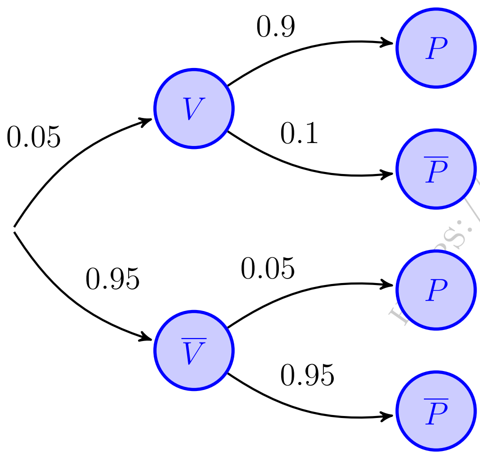
b) (1.25 puntos) Si la prueba determina que un individuo no tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo tenga?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$V \equiv$ "La persona está infectada por el virus"
$P \equiv$ "El test determina que la persona está infectada por el virus"



a)
$$\begin{aligned} P(P) &= P\big((V \cap P) \cup (\overline{V} \cap P)\big) \\ &= P(V \cap P) + P(\overline{V} \cap P) \\ &= P(V) \cdot P(P \mid V) + P(\overline{V}) \cdot P(P \mid \overline{V}) \\ &= 0.05 \cdot 0.9 + 0.95 \cdot 0.05 = 0.0925 \end{aligned}$$

$$P(\overline{V} \mid P) = \frac{P(\overline{V} \cap P)}{P(P)} = \frac{P(\overline{V}) \cdot P(P \mid \overline{V})}{P(P)} = \frac{0.95 \cdot 0.05}{0.0925} = 0.51352$$

b)
$$P(V \mid \overline{P}) = \frac{P(V \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{P(V) \cdot P(\overline{P} \mid V)}{1 - P(P)} = \frac{0.05 \cdot 0.1}{1 - 0.0925} = 5.5 \cdot 10^{-3} = 0.0055$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Se supone que la duración de un aparato electrónico, en años, sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 0.5 años.

a) *(1.5 puntos) Para estimar la duración media, se considera una muestra aleatoria de 150 aparatos, los cuales han durado, en media, 1.8 años. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media, al 95 % de confianza.*

b) *(1 punto) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.2 años y un nivel de confianza del 99 %?*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración del aparato electrónico (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0.5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.5) \xrightarrow{n=150} \overline{x} = 1.8 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{150}} = 0.08$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (1.72; 1.88)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.2 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{n}} < 0.2 \implies n > \left(2.575 \cdot \frac{0.5}{0.2}\right)^2 = 41.44 \implies \boxed{n = 42}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Una empresa hace un estudio de mercado antes de lanzar un nuevo producto. Para ello selecciona al azar a 200 personas a las que proporciona su producto durante 4 semanas para que indiquen al final de ese periodo si les ha gustado o no. A 150 de ellas les ha gustado y al resto no.

a) (1.5 puntos) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas a las que les gustará el producto, al 99 % de confianza.

b) (1 punto) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño de la muestra?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $n = 200 \quad \& \quad \hat{p} = \frac{150}{200} = 0.75 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.25 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.99$

$$1 - \alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1 - \alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{200}} = 0.079$$

$$I.C._{99\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(p) = (0.671; 0.829)}$$

b) El error de estimación del intervalo anterior es $E = 0.079$. Como $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$, si mantenemos el mismo nivel de confianza $z_{\alpha/2}$ y la proporción muestral $\hat{p}$ y $\hat{q}$, y disminuimos el tamaño muestral n, el error de estimación aumentaría.