MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2023

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Responda a las siguientes cuestiones:

a) (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial: $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ esté bien planteada, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Calcule X.

b) (5 puntos) Determine el valor/es del parámetro m para que el sistema (S) sea compatible y calcule la solución del mismo para $m = 3$.

$$S : \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{cases}$$

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $\underbrace{\underbrace{\underbrace{A}_{2\times 3} \cdot \underbrace{B}_{3\times 2}}_{2\times 2} \cdot \underbrace{X}_{2\times 1}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}}_{2\times 1} \implies X \in \mathcal{M}_{2\times 1}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\exists\ (AB)^{-1}]{|AB|=1} (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \implies \underbrace{(A \cdot B)^{-1} \cdot A \cdot B}_{I} \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\implies X = (A \cdot B)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 24 \\ -14 \end{pmatrix}}$$

b) El sistema es homogéneo, por lo que tiene solución $\forall m \in \mathbb{R}$. Para $m = 3$ tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + 2F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - \lambda + 3\lambda = 0 \\ \Rightarrow -3\lambda + z = 0 \\ \Rightarrow y = \lambda \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = \lambda \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3\lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

> *Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. el lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide:*
>
> *a) (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?*
>
> *b) (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.*
>
> *(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2023)*

Solución.

	Lote A	Lote B	Restricción
Jamones	1	1	≤ 120
Botellas de vino	2	5	≤ 390
Botellas de cava	0	4	≤ 240

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de lotes A"
  $y \equiv$ "Nº de lotes B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

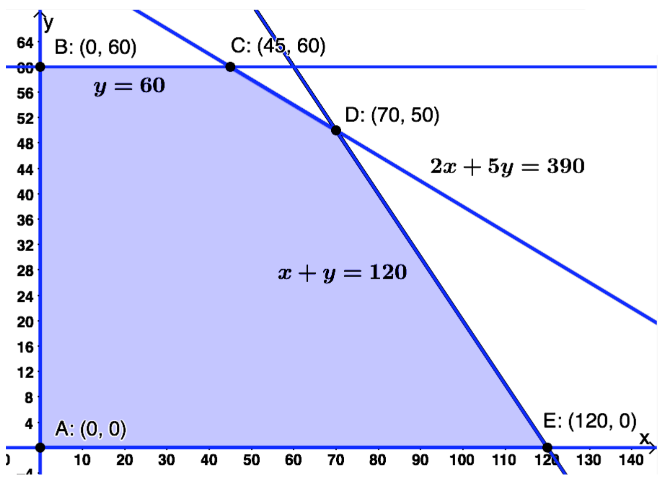
$$\begin{cases} ① \ x+y \leq 120 \\ ② \ 2x+5y \leq 390 \\ ③ \ 4y \leq 240 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x+y \leq 120 & \to (0,120) \quad \& \quad (120,0) \\ ② \ 2x+5y \leq 390 & \to (0,78) \quad \& \quad (195,0) \\ ③ \ y \leq 60 & \to (0,60) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 90x + 180y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	60	10800
C	45	60	14850
D	70	50	15300
E	120	0	10800



El *ingreso máximo* es de 15300 €, que se obtiene vendiendo 70 lotes A y 50 lotes B.

b) Evaluamos los artículos de cada lote:

	Lote A	Lote B	Total	Existencias
Jamones	70	50	120	120
Botellas de vino	$70 \cdot 2$	$50 \cdot 5$	390	390
Botellas de cava	0	$50 \cdot 4$	200	240

Por lo tanto con la solución que maximiza los ingresos se agotan las existencias de jamones y botellas de vino y sobran 40 botellas de cava.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

Sea $P(t) = 1000 \cdot \left(15 + \dfrac{t}{100+t^2}\right)$ *una función que representa el número de habitantes de cierta población siendo* t *el número de años transcurridos desde el año* 2000. *Se pide:*

a) (2 puntos) Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.

b) (5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?

c) (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15040 *individuos?*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 1000 \cdot \left(15 + \dfrac{t}{100+t^2}\right) = 1000 \cdot 15 = 15000$ habitantes

b) $P'(t) = 1000 \cdot \dfrac{100+t^2 - t\cdot 2t}{(100+t^2)^2} = 1000 \cdot \dfrac{-t^2+100}{(100+t^2)^2} = 0 \xrightarrow{-t^2+100=0} \begin{cases} \cancel{t = -10} \\ t = 10 \end{cases}$

	$(0,10)$	$(10,+\infty)$
Signo $P'(t)$	+	-
$P(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La población $P(t)$ es *creciente* en $(0,10)$ y *decreciente* en $(10,+\infty)$, y tiene un *máximo absoluto* en $(10, 15050)$, lo que significa que en el año 2010 habría una población máxima de 15050 habitantes.

c) $P(t) = 1000 \cdot \left(15 + \dfrac{t}{100+t^2}\right) = 15040 \implies 0.04t^2 - t + 4 = 0 \implies t = \{5, 20\}$

Luego en los años 2005 y 2020 la población será de 15040 habitantes.

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Sean las funciones: $g(x) = a \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3$, $h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$;

a) (3 puntos) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

b) (4 puntos) Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ *para que* $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{, si } x \leq 1 \\ h(x) & \text{, si } x > 1 \end{cases}$ *sea continua en* $x = 1$, *siendo* $g(x)$, $h(x)$ *las funciones del enunciado.*

c) (3 puntos) Calcule $\int_0^2 (1 - 2x)^3 \, dx$.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x+2)}{x \cdot \cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

b) `Continuidad en` $x = 1$:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} a \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 = \frac{a}{8}$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} h(x) = 3$
- $f(1) = g(1) = \frac{a}{8}$

$$f(x) \text{ es continua en } x = 1 \iff \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \implies \frac{a}{8} = 3 \implies \boxed{a = 24}$$

c) $$\int_0^2 (1 - 2x)^3 \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{-2}_{u'} \cdot \underbrace{(1 - 2x)^3}_{u^3} \, dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - 2x)^4 \Big]_0^2$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot (81 - 1) = -10$$

Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por $G1$, $G2$, $G3$. Los grupos representan el 40 %, el 35 % y el 25 % de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80 % del grupo $G1$, el 60 % del grupo $G2$ y el 92 % del grupo $G3$. Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

a) (2 puntos) Haya superado la asignatura y sea del grupo $G3$.

b) (2 puntos) No haya superado la asignatura.

c) (2 puntos) Haya superado la asignatura.

d) (2 puntos) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo $G1$.

e) (2 puntos) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura calcule la probabilidad de ser del grupo $G3$.

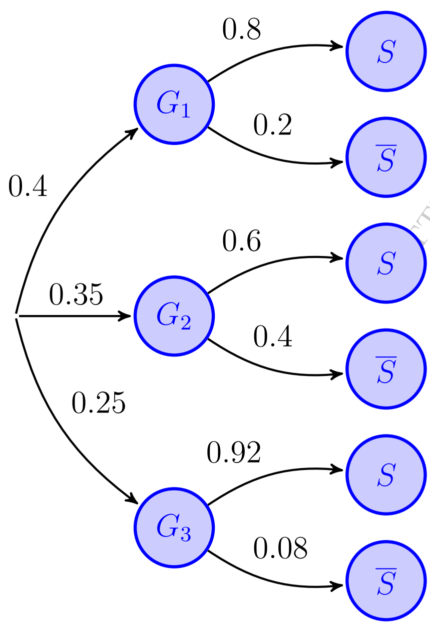
(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$G_1 \equiv$ "El estudiante es del grupo G_1" $\quad G_2 \equiv$ "El estudiante es del grupo G_2"

$G_3 \equiv$ "El estudiante es del grupo G_3" $\quad S \equiv$ "El estudiante supera la asignatura"



a) $P(G_3 \cap S) = P(G_3) \cdot P(S \mid G_3) = 0.25 \cdot 0.92 = 0.23$

b) $P(\overline{S}) = P\Big((G_1 \cap \overline{S}) \cup (G_2 \cap \overline{S}) \cup (G_3 \cap \overline{S})\Big)$

$$= P(G_1 \cap \overline{S}) + P(G_2 \cap \overline{S}) + P(G_3 \cap \overline{S})$$

$$= P(G_1) \cdot P(\overline{S} \mid G_1) + P(G_2) \cdot P(\overline{S} \mid G_2)$$

$$+ P(G_3) \cdot P(\overline{S} \mid G_3) = 0.4 \cdot 0.2$$

$$+ 0.35 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.08 = 0.24$$

c) $P(S) = 1 - P(\overline{S}) = 1 - 0.24 = 0.76$

d) $P(\overline{G_1} \cap \overline{S}) = P(\overline{G_1 \cup S}) = 1 - P(G_1 \cup S)$

$$= 1 - \Big(P(G_1) + P(S) - P(G_1 \cap S)\Big)$$

$$= 1 - \Big(P(G_1) + P(S) - P(G_1) \cdot P(S \mid G_1)\Big)$$

$$= 1 - (0.4 + 0.76 - 0.4 \cdot 0.8) = 0.16$$

e) $P(G_3 \mid S) = \dfrac{P(G_3 \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(G_3) \cdot P(S \mid G_3)}{P(S)} = \dfrac{0.25 \cdot 0.92}{0.76} = 0.3026$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.

a) (4 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.

b) (4 puntos) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0.75 horas, con un nivel de confianza del 95 %.

c) (2 puntos) A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9.8444; 10.7555) para la media de la población. Determine el nivel de confiaza con el que se ha construido dicho intervalo.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo dedicado a las tareas del hogar (h/semana)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = 10 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} = 0.49$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (9.51; 10.49)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E \leq 0.75 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0.75 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{2}{0.75}\right)^2 = 27.32 \implies \boxed{n = 28}$$

c) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=81} I.C. = (9.8444; 10.7555)$

$$E = \frac{10.7555 - 9.8444}{2} = 0.4555 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{81}} = 0.4555 \implies z_{\alpha/2} = 2.0497$$

$$z_{\alpha/2} = 2.0497 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.9798 \Rightarrow \alpha/2 = 0.02 \Rightarrow \alpha = 0.04 \implies \boxed{1-\alpha = 0.96}$$