

# MATEMATICAS II

## EXAMENES RESUELTOS



# EVAU MODELO 2019

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio





# Modelo 2019

## OPCIÓN A

### Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Para cada uno de los siguientes apartados proponga un ejemplo de matriz cuadrada  $A$ , de dimensión  $3 \times 3$ , con todos sus números distintos de cero y con sus tres filas y columnas diferentes, que cumpla la condición pedida.

- (0.5 puntos) El determinante de  $A$  vale 0.
- (0.5 puntos) El determinante de  $A$  vale 1.
- (0.5 puntos) La matriz  $A$  coincide con su traspuesta.
- (1 punto) Para una cierta matriz cuadrada  $C$ , distinta de la matriz nula y de la identidad, se verifica que  $A \cdot C = C \cdot A$ . (Debe proponer ejemplos concretos para las dos matrices  $A$  y  $C$ )

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

### Solución.

- a) Para que  $|A| = 0$  vamos a elegir  $A$  de forma que  $F_3 = F_1 + F_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

- b) Proponemos tres maneras diferentes de hacerlo:

- 1) Cogemos una matriz diagonal  $A$ , con  $|A| = 1$  (producto de la diagonal principal) y la transformamos utilizando las propiedades de los determinantes de forma que no se altere el valor del mismo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ F_2 + F_1 & F_2 + F_1 & F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 & F_3 + F_1 & F_3 + F_1 \end{vmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 2) Dividiendo una fila de una matriz por su determinante (siendo éste no nulo) obtenemos una matriz de determinante igual a 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- 3) Cogemos una matriz cualquiera sin ceros y con un parámetro  $a$ . Hallamos su determinante y obligamos a que valga 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix} \implies |A| = 2a - 2 = 1 \implies a = \frac{3}{2}$$
$$\implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

c) Cualquier matriz simétrica cumple la condición de que  $A = A^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Como los elementos de la matriz  $C$  no están obligados a ser distintos de cero, podemos tomar  $C = k \cdot I$ , siendo  $k \neq 0$ . De esta forma:

$$A \cdot C = A \cdot k \cdot I = kA \quad \& \quad CA = k \cdot I \cdot A = kA, \text{ luego } C = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

También podríamos haber elegido cualquier matriz  $A$  invertible (por ejemplo la del apartado b), cuyo determinante vale 1) y decir que  $C = A^{-1}$ .

Así, como  $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$  siempre se cumple lo que nos piden en el enunciado.

o

### Ejercicio 2 (2.5 puntos)

La contaminación por dióxido de nitrógeno,  $NO_2$ , en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función

$$c(t) = 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30} \text{ mg/m}^3$$

, donde  $t \in [0, 30]$  representa el tiempo, expresado en días, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.

- (0.5 puntos) ¿Qué nivel de  $NO_2$ , había a las 12 horas del día 10 de abril?
- (1.25 puntos) ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de  $NO_2$ ?, ¿cuál fue ese nivel máximo?
- (0.75 puntos) Calcule, mediante  $\frac{1}{30} \int_0^{30} c(t) dt$ , el nivel promedio del mes.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

### Solución.

a) Hasta las 12 horas del día 10 de abril han transcurrido  $t = 9.5$  días.

$$c(9.5) = 80 - 6 \cdot 9.5 + \frac{23 \cdot 9.5^2}{20} - \frac{9.5^3}{30} = 98.21 \text{ mg/m}^3$$

$$b) c'(t) = -6 + \frac{23t}{10} - \frac{t^2}{10} = 0 \implies t^2 - 23t + 60 = 0 \implies \begin{cases} t = 3 \\ t = 20 \end{cases}$$

	(0, 3)	(3, 20)	(20, 30)
Signo $c'(t)$	-	+	-
$c(t)$	Decreciente ↘	Creciente ↗	Decreciente ↘

Estudiando la monotonía de  $c(t)$ , el máximo puede darse en  $t = 0$  o en  $t = 20$ . Como  $c(0) = 80$  y  $c(20) = 153.33$ , la concentración máxima se produce en  $t = 20$  (0 horas del día 21 de abril) y valdrá  $153.33 \text{ mg/m}^3$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{30} \int_0^{30} c(t) dt &= \frac{1}{30} \int_0^{30} \left( 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30} \right) dt = \frac{1}{30} \left( 80t - 3t^2 + \frac{23t^3}{60} - \frac{t^4}{120} \right) \Big|_0^{30} \\ &= \frac{1}{30} \left( 80 \cdot 30 - 3 \cdot 30^2 + \frac{23 \cdot 30^3}{60} - \frac{30^4}{120} \right) - (0) = 110 \text{ mg/m}^3 \end{aligned}$$

### Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dados los puntos  $A(1, 2, -3)$ ,  $B(1, 5, 0)$ ,  $C(5, 6, -1)$  y  $D(4, -1, 3)$ , se pide:

- (1.5 puntos) Calcular el plano  $\pi$  que contiene a los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y la distancia del punto  $D$  a dicho plano.
- (0.5 puntos) Calcular el volumen del tetraedro definido por los cuatro puntos dados.
- (0.5 puntos) Calcular el área del triángulo definido por  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

### Solución.

$$\text{a) } \pi \in \begin{cases} A(1, 2, -3) \\ B(1, 5, 0) \\ C(5, 6, -1) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{cases} A(1, 2, -3) \\ \vec{AB} = (0, 3, 3) \\ \vec{AC} = (4, 4, 2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \boxed{\pi \equiv -x + 2y - 2z - 9 = 0}$$

$$d(D, \pi) = \frac{|-4 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 - 9|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{21}{3} = 7 \text{ u}$$

$$\text{b) } \vec{AD} = (3, -3, 6)$$

$$Vol_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} \right\| = \frac{|-126|}{6} = 21 \text{ u}^3$$

$$\text{c) } Area_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |(-6, 12, 12)| = \frac{\sqrt{324}}{2} = 9 \text{ u}^2$$

#### Ejercicio 4 (2.5 puntos)

El examen de oposición a la Administración Local de cierta ciudad consta de 300 preguntas, con respuesta verdadero o falso. Un opositor responde al azar todas las preguntas. Se considera la variable aleatoria  $X$  ("número de respuestas acertadas") y se pide:

- (1.5 puntos) Justificar que la variable  $X$  se puede aproximar por una normal y obtener los parámetros correspondientes.
- (1 punto) Utilizando la aproximación por la normal, hallar la probabilidad de que el opositor acierte a lo sumo 130 preguntas y la probabilidad de que acierte exactamente 160 preguntas.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

#### Solución.

- Se trata de un experimento aleatorio en donde los resultados posibles son *acierto* y *fallo*, con probabilidad de  $1/2$  en cada caso. Se repite el experimento 300 veces, por lo tanto  $X$  es una binomial  $\mathcal{B}(300; 0.5)$ , en donde  $n = 300$  y  $p = 0.5 = q$ .

$$X : \mathcal{B}(300, 0.5) \left\{ \begin{array}{l} n = 300 > 30\checkmark \\ np = 150 > 5\checkmark \\ nq = 150 > 5\checkmark \end{array} \right\} Y : \mathcal{N}(np; \sqrt{npq}) \sim \mathcal{N}(150; 8.66)$$

- Resolvemos aproximando la variable Binomial a una Normal y aplicando la aproximación por continuidad de Yates.

$$\begin{aligned} P(X \leq 130) &= P(Y \leq 130.5) = P\left(Z \leq \frac{130.5 - 150}{8.66}\right) = P(Z \leq -2.25) \\ &= P(Z \geq 2.25) = 1 - P(Z \leq 2.25) = 1 - 0.9878 = 0.0122 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 160) &= P(159.5 \leq Y \leq 160.5) = P\left(\frac{159.5 - 150}{8.66} \leq Z \leq \frac{160.5 - 150}{8.66}\right) \\ &= P(1.10 \leq Z \leq 1.21) = P(Z \leq 1.21) - P(Z \leq 1.10) \\ &= 0.8869 - 0.8643 = 0.0226 \end{aligned}$$

○

# Modelo 2019

## OPCIÓN B

### Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones: 
$$\begin{cases} x - my - z = 0 \\ mx - 4y + (6 - 2m)z = -8m \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}, \text{ se pide}$$

- a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro  $m$ .
- b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso  $m = 6$ .

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

### Solución.

- a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes  $A$ .

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & 0 \\ m & -4 & 6-2m & -8m \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -m^2 + 8m - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 6 \end{cases}$$

- Si  $m \neq \{2, 6\}$   $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow$  SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si  $m = 2 \Rightarrow A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -16 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -16 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Rightarrow$  SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

- Si  $m = 6 \Rightarrow A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 6 & -4 & -48 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow$  SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- b) Resolvemos el sistema para  $m = 6$  por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente vamos a resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden

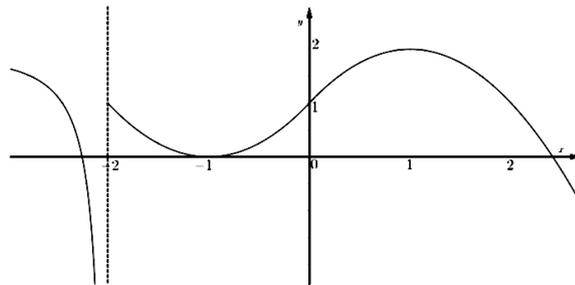
2 encontrado en la discusión. Así:

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \end{array} \right) \sim F_2 - 6F_1 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & -48 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x - 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \lambda = 0 \\ 32y = -48 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda - 9 \\ y = -3/2, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

### Ejercicio 2 (2.5 puntos)

a) (1 punto) A partir de la siguiente gráfica de la función  $f$ , determine los valores de:  $f'(-1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .



b) (1.5 puntos) Calcule  $\int_{-3}^{\pi} g(x) dx$ , donde  $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ 1 + \sin x & \text{si } 0 < x \leq 4 \end{cases}$

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

### Solución.

a)  $\blacksquare f'(-1) = 0$ , pues es un mínimo de  $f(x)$ .

$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$

$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

b) 
$$\int_{-3}^{\pi} g(x) dx = \int_{-3}^0 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_0^{\pi} (1 + \sin x) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 + x \right|_{-3}^0$$

$$+ x - \cos x \Big|_0^{\pi} = (0) - \left( \frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2 + (-3) \right)$$

$$+ \left( \pi - \cos \pi \right) - \left( 0 - \cos 0 \right) = 3 + \pi + 2 = \pi + 5$$

### Ejercicio 3 (2.5 puntos)

$$\text{Dadas las rectas } r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

- a) (1 punto) Determinar la posición relativa de  $r$  y  $s$ .
- b) (1 punto) Obtener un plano que contenga a las dos rectas.
- c) (0.5 puntos) Dado el punto  $A(3, 1, 0)$ , de la recta  $s$ , obtener un punto  $B$ , de la recta  $r$ , de modo que el vector  $\overrightarrow{AB}$  sea perpendicular a la recta  $r$ .

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

### Solución.

$$r \equiv \begin{cases} P(2, 3, 1) \\ \vec{d}_r = (1, 1, -1) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} Q(2, 0, 1) \\ \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1) \end{cases} \quad \overrightarrow{PQ} = (0, -3, 0)$$

$$\text{a) } [\overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r, \vec{d}_s] = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \& \quad \text{ran}[\overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r] = 2 \quad \& \quad \text{ran}[\vec{d}_r, \vec{d}_s] = 1$$

Las rectas  $r$  y  $s$  son paralelas.

$$\text{b) } \pi \equiv \begin{cases} P(2, 3, 1) \\ \vec{d}_r = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{PQ} = (0, -3, 0) \end{cases} \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \boxed{\pi \equiv x + z - 3 = 0}$$

$$\text{c) } \begin{cases} A(3, 1, 0) \\ B(2 + \lambda, 3 + \lambda, 1 - \lambda) \end{cases} \quad \text{Si } \overrightarrow{AB} = (-1 + \lambda, 2 + \lambda, 1 - \lambda) \perp \vec{d}_r \implies \overrightarrow{AB} \cdot \vec{d}_r = 0$$
$$-1 + \lambda + 2 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies B(2, 3, 1)$$

————— o —————

#### Ejercicio 4 (2.5 puntos)

El grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de una escuela de idiomas, está compuesto por un 60% de mujeres y el resto varones. Se sabe que el 30% del grupo estudia alemán y que la cuarta parte de las mujeres estudia alemán. Se recibe un mensaje en el grupo. Se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer, si se sabe que el o la remitente estudia alemán.
- (1.25 puntos) Si en el mensaje no hay ninguna información sobre el sexo y estudios del remitente, calcular la probabilidad de que sea varón y estudie alemán.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

#### Solución.

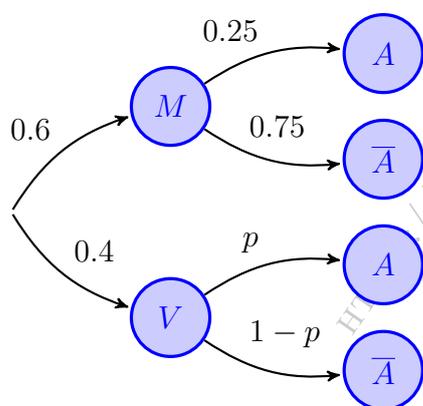
Denominamos los sucesos:

$M \equiv$  "El mensaje lo envía una mujer"

$V \equiv$  "El mensaje lo envía un hombre"

$A \equiv$  "El remitente estudia alemán"

$$\text{a) } P(M | A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M) \cdot P(A | M)}{P(A)} = \frac{0.6 \cdot 0.25}{0.3} = 0.5$$



$$\begin{aligned} \text{b) } P(A) &= P((M \cap A) \cup (V \cap A)) \\ &= P(M \cap A) + P(V \cap A) \\ &= P(M) \cdot P(A | M) + P(V) \cdot P(A | V) \\ &= 0.6 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot p = 0.3 \\ &\implies p = 0.375 \\ P(V \cap A) &= P(V) \cdot P(A | V) \\ &= 0.4 \cdot 0.375 = 0.15 \end{aligned}$$