MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2022
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Un centro de estudios utiliza tres servidores para conectarse a Internet. El 40 % de los accesos a la red se realiza a través del servidor uno, el 35 % a través del servidor dos y el resto a través del tres. El 4 % de los accesos a la red que utilizan el servidor 1 resultan bloqueados. También se bloquean el 6 % de los accesos que se producen a través del servidor 2 y el 9 % de los que usan el servidor 3.

a) (0.5 puntos) Dibuja el diagrama en árbol para describir esta situación.

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un acceso a internet no resulte bloqueado?

c) (1 punto) Si un acceso a Internet resulta bloqueado, ¿cuál es la probabilidad de que el bloqueo haya ocurrido en el servidor 2?

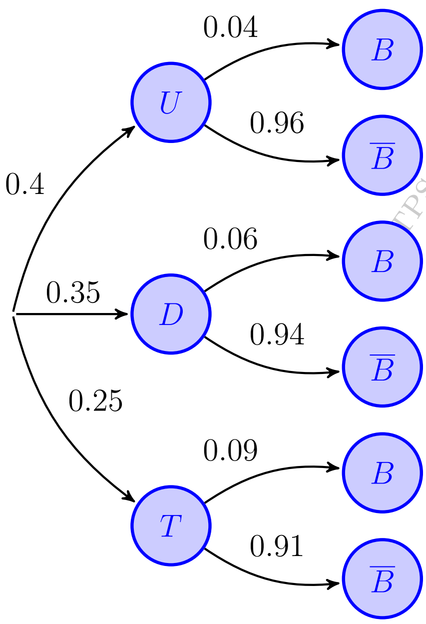
(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

Solución.

Sean los sucesos:

$U \equiv$ "Se utiliza el servidor 1" $\quad D \equiv$ "Se utiliza el servidor 2"

$T \equiv$ "Se utiliza el servidor 3" $\quad B \equiv$ "El acceso es bloqueado"



b) $$P(\overline{B}) = P\big((U\cap\overline{B})\cup(D\cap\overline{B})\cup(T\cap\overline{B})\big) = P(U\cap\overline{B}) + P(D\cap\overline{B}) + P(T\cap\overline{B}) = P(U)\cdot P(\overline{B}\mid U) + P(D)\cdot P(\overline{B}\mid D) + P(T)\cdot P(\overline{B}\mid T) = 0.4\cdot 0.96 + 0.35\cdot 0.94 + 0.25\cdot 0.91 = 0.9405$$

c) $$P(D\mid B) = \frac{P(D\cap B)}{P(B)} = \frac{P(D)\cdot P(B\mid D)}{1-P(\overline{B})} = \frac{0.35\cdot 0.06}{1-0.9405} = 0.3529$$

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una compañía de seguros tiene asegurados 2500 *coches,* 560 *guaguas y* 220 *motos. Se estima que las probabilidades de tener un accidente a lo largo de un año son* 0.1 *para los coches,* 0.08 *para las guaguas y* 0.16 *para las motos.*

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es el número total de vehículos (sumando coches, guaguas y motos) que se puede esperar que tengan un accidente a lo largo del próximo año?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo año tengan un accidente al menos 270 *de los coches asegurados?*

c) (1 punto) La Administración Tributaria decide inspeccionar las cuentas de esta aseguradora. Para realizar la inspección elige al azar las pólizas de 10 *de los vehículos asegurados por la compañía. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los vehículos elegidos haya al menos dos guaguas?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

a) Nº vehículos accidentados $= 0.1 \cdot 2500 + 0.08 \cdot 560 + 0.16 \cdot 220 = 330$

b) $X \equiv$ "Nº de coches accidentados"

$$X : \mathcal{B}(2500, 0.1) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 2500 > 30 \checkmark \\ np = 250 > 5 \checkmark \\ nq = 2250 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}\Big(np, \sqrt{npq}\Big) = \mathcal{N}(250, 15)$$

$$P(X \geq 270) = P(Y \geq 269.5) = P\left(Z \geq \frac{269.5 - 250}{15}\right) = P(Z \geq 1.3)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.3) = 1 - 0.9032 = 0.0968$$

c) $X \equiv$ "Nº de guaguas" $\longrightarrow X : \mathcal{B}\left(10, \frac{560}{3280} = 0.1707\right)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \Big[P(X = 0) + P(X = 1)\Big]$$
$$= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.1707^0 \cdot 0.8293^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.1707^1 \cdot 0.8293^9\right]$$
$$= 1 - 0.4705 = 0.5295$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Se realiza un estudio sobre el gasto en electricidad en los hogares canarios durante el año en curso. A partir de una muestra de 289 viviendas se obtuvo el intervalo de confianza (128.76; 134.32) para el gasto medio mensual (en euros). Sabiendo que la varianza del gasto en electricidad es 729 euros^2.

a) (1.25 puntos) ¿Cuál fue el gasto medio mensual por hogar en Canarias obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con que se obtuvo el intervalo?

b) (1.25 puntos) Usando como valor de la media la estimación puntual obtenida en el apartado (a), y tomando una muestra de 576 hogares, ¿cuál es la probabilidad de que el gasto medio en electricidad de dichos hogares sea mayor que 130€?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto en electricidad (€)”} \xrightarrow{\sigma^2=729} X : \mathcal{N}(\mu, 27)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 27) \xrightarrow{n=289} I.C.(128.76; 134.32)$

$$\overline{x} = \frac{128.76 + 134.32}{2} = 131.54$$

$$E = \frac{134.32 - 128.76}{2} = 2.78 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{27}{\sqrt{289}} = 2.78 \implies z_{\alpha/2} = 1.75$$

$$z_{\alpha/2} = 1.75 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.9599 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0401 \Rightarrow \alpha = 0.0802 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.9198}$$

b) $X : \mathcal{N}(131.54, 27) \xrightarrow{n=576} \overline{X} : \mathcal{N}\left(131.54, \dfrac{27}{\sqrt{576}}\right) = \mathcal{N}(131.54, 1.125)$

$$P(\overline{X} > 130) = P\left(Z > \frac{130 - 131.54}{1.125}\right) = P(Z > -1.37) = P(Z < 1.37) = 0.9147$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

En un periódico se lee el siguiente titular: "Un 63 % de los españoles valoran positivamente el teletrabajo".

a) (1.25 puntos) Sabiendo que para obtener dicha proporción se han realizado 800 encuestas telefónicas, construir un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo.

b) (1.25 puntos) Utilizando el valor publicado por el periódico como estimación inicial de dicha proporción, ¿a cuántas personas habría que encuestar, para estimar la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo, con un error máximo del 1 % y con un nivel de confianza del 88 %?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

a) $n = 800 \quad \& \quad \hat{p} = 0.63 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.37 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \Longrightarrow \alpha = 0.1 \Longrightarrow \alpha/2 = 0.05 \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.63 \cdot 0.37}{800}} = 0.028$$

$$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0.602; 0.658)}$$

b) $n = ? \quad \& \quad E < 0.01 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.88$

$$1 - \alpha = 0.88 \Longrightarrow \alpha = 0.12 \Longrightarrow \alpha/2 = 0.06 \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = 0.94 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.555$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.555 \cdot \sqrt{\frac{0.63 \cdot 0.37}{n}} < 0.01 \Rightarrow n > \left(\frac{1.555}{0.01}\right)^2 \cdot 0.63 \cdot 0.37 = 5636.41$$

$$\Longrightarrow \boxed{n = 5637}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Durante los últimos 15 meses se ha consumido agua de un depósito (en decenas de miles de metros cúbicos) según la siguiente función:

$$c(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} \cdot (m^2 - 9m + 30) & , \text{ si } 0 \le m < 10 \\ \dfrac{1}{5} \cdot (m^2 - 25m + 170) & , \text{ si } 10 \le m \le 15 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, decir si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.*

b) *(1 punto) ¿Cuándo se alcanzaron los consumos mínimos y máximos? ¿Cuáles fueron los correspondientes valores?*

c) *(0.5 puntos) ¿Cuándo el consumo fue igual a 10 millones de litros ($10000\ m^3$)?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

Solución.

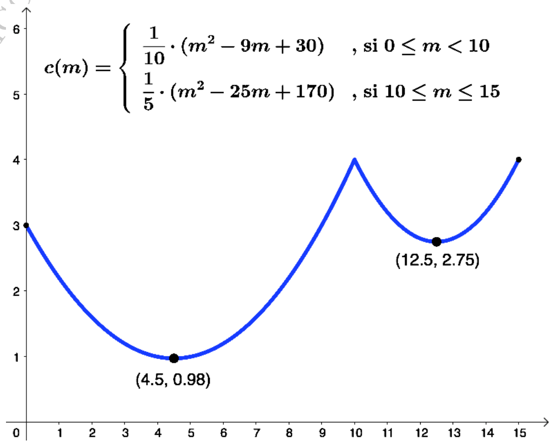
a)

- $\dfrac{1}{10} \cdot (m^2 - 9m + 30)$ es una parábola convexa ($\cap$) que no corta al eje OX con vértice en $m_V = \dfrac{9}{2} = 4.5$
- $\dfrac{1}{5} \cdot (m^2 - 25m + 170)$ es una parábola convexa ($\cap$) que no corta al eje OX con vértice en $m_V = \dfrac{25}{2} = 12.5$
- `Continuidad en` $m = 10$:

$$\lim_{m\to 10^-} c(m) = \lim_{m\to 10} \frac{1}{10} \cdot (m^2 - 9m + 30) = 4$$

$$\lim_{m\to 10^+} c(m) = \lim_{m\to 10} \frac{1}{5} \cdot (m^2 - 25m + 170) = 4$$

$$c(10) = \frac{1}{5} \cdot (100 - 250 + 170) = 4$$



Como $\lim\limits_{m\to 10^-} c(m) = \lim\limits_{m\to 10^+} c(m) = c(10) \implies c(m)$ es continua en $m = 10$.

$c(m)$ es *creciente* en $(4.5,) \cup (12.5, 15)$ y *decreciente* en $(0, 4.5) \cup (10, 12.5)$

b) El *consumo mínimo* es de $c(4.5) = 0.975$, es decir $9750\ m^3$, mientras que el *consumo máximo* es de $c(10) = 4$, es decir $40000\ m^3$.

c) $c(m) = 1 \implies \begin{cases} \dfrac{1}{10} \cdot (m^2 - 9m + 30) = 1 \implies m^2 - 9m + 20 = 0 \implies m = \{4, 5\} \\ \dfrac{1}{5} \cdot (m^2 - 25m + 170) = 1 \implies m^2 - 25m + 165 = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$

Luego en los meses 4 y 5 el consumo será de $10000\ m^3$.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

En una pared se quiere pintar un mural abstracto. En ese mural hay que pintar la figura encerrada dentro de la parábola $y = x^2 - 1$, y limitada por encima por la recta $y = 11 - x$ y por debajo por el eje OX. Las distancias en los ejes están definidas en metros.

a) *(2 puntos) ¿Cuántos metros cuadrados mide la figura?*

b) *(0.5 puntos) El trozo de figura a la izquierda de la recta $x = -1$ se pinta de azul, y el trozo a la derecha de gris. Si cada metro cuadrado de pintura azul cuesta 2€, y pintar el mural ha costado en total 95€, ¿cuánto cuesta cada m^2 de pintura gris?*

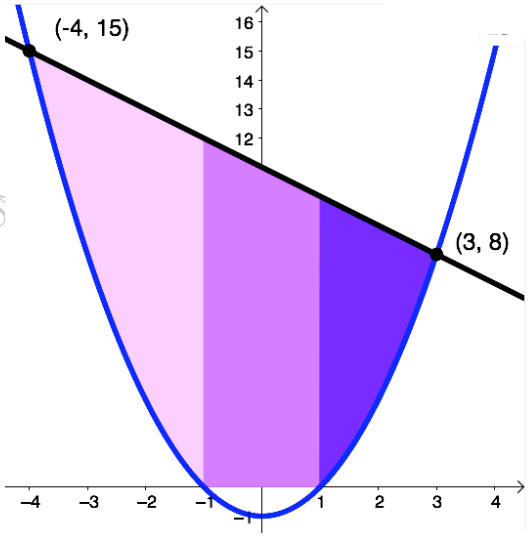
(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

a) Esbozamos la gráfica del mural teniendo en cuenta que:

- $f(x) = x^2 - 1$ es una parábola convexa ($\cup$) que corta al eje OX en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$
- $g(x) = 11 - x$ es una recta decreciente que corta a los ejes en $(11, 0)$ y en $(0, 11)$
- Las dos funciones se cortan en:

$$x^2 - 1 = 11 - x \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = \{-4, 3\}$$



Con todo esto el área del mural será:

$$\begin{aligned}
Area &= \int_{-4}^{-1} \Big[g(x) - f(x)\Big]\, dx + \int_{-1}^{1} g(x)\, dx + \int_{1}^{3} \Big[g(x) - f(x)\Big]\, dx \\
&= \int_{-4}^{-1} (-x^2 - x + 12)\, dx + \int_{-1}^{1} (11 - x)\, dx + \int_{1}^{3} (-x^2 - x + 12)\, dx \\
&= \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\Bigg]_{-4}^{-1} + 11x - \frac{x^2}{2}\Bigg]_{-1}^{1} + -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\Bigg]_{1}^{3} \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 12\right) - \left(\frac{64}{3} - 8 - 48\right) + \left(11 - \frac{1}{2}\right) - \left(-11 - \frac{1}{2}\right) \\
&+ \left(-9 - \frac{9}{2} + 36\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 12\right) = \frac{45}{2} + 22 + \frac{34}{3} = \frac{335}{6} \simeq 55.83\ m^2
\end{aligned}$$

b) Llamamos $p \equiv$ "Precio de la pintura gris (€$/m^2$)" y tenemos:

$$2 \cdot \frac{45}{2} + p \cdot \left(22 + \frac{34}{3}\right) = 95 \implies \frac{100p}{3} = 50 \implies \boxed{p = 1.5\ €/m^2}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una empresa dedicada a actividades y deportes acuáticos ha vendido en un día, un total de 45 sesiones entre paddle sur, kayak y moto acuática. Los precios por sesión y persona de cada una de estas actividades son 40€, 20€ y 60€ respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700€ ese día. Si por cada persona que elige kayak hay tres que eligen paddle surf.

a) (1.5 puntos) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) (1 punto) ¿Cuántas personas van a cada actividad?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“La persona practica paddle surf”} \\ y &\equiv \text{“La persona practica kayak”} \\ z &\equiv \text{“La persona practica moto acuática”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 40x + 20y + 60z = 1700 \\ \dfrac{y}{1} = \dfrac{x}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 45 \\ 2x + y + 3z = 85 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 2 & 1 & 3 & 85 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -45 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 4F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -25 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 10 + 5 = 45 \\ \Rightarrow -y + 5 = -5 \\ \Rightarrow -5z = -25 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 30 \\ y = 10 \\ z = 5 \end{array}}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una fábrica de helados produce helados con dos sabores (turrón y pistacho) que se envasan en tarrinas de dos tamaños, pequeño y grande. Las tarrinas pequeñas llevan 200 gramos de helado de turrón y 150 gramos de pistacho; las tarrinas grandes llevan 500 gramos de turrón y 300 de pistacho. la fábrica obtiene un beneficio de 2€ por la venta de cada tarrina pequeña y de 4.50€ por la venta de cada tarrina grande. La fábrica produce cada semana 400 kg de helado de turrón y 255 kg de helado de pistacho que envasa en estas tarrinas. Para satisfacer la demanda de las heladerías de la zona, debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas y 50 grandes. Suponiendo que pueda vender toda la producción:

a) *(1 punto) Forumular el correspondiente problema de programación lineal.*

b) *(0.5 puntos) Representar la región factible.*

c) *(1 punto) ¿Cuántas tarrinas de cada clase debe producir la fábrica cada semana si quiere maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

	Tarrina pequeña	Tarrina grande	Producción
Helado de turrón (kg)	0.2	0.5	≤ 400
Helado de pistacho (kg)	0.15	0.3	≤ 255
	≥ 200	≥ 50	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de tarrinas pequeñas"
  $y \equiv$ "Nº de tarrinas grandes"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 0.2x + 0.5y \leq 400 & \rightarrow (0, 800) \quad \& \quad (2000, 0) \\ ② \ 0.15x + 0.3y \leq 255 & \rightarrow (0, 1700) \quad \& \quad (850, 0) \\ ③ \ x \geq 200 & \rightarrow (200, 0) \\ ④ \ y \geq 50 & \rightarrow (0, 50) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 2x + 4.5y$ (euros)

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	200	50	625
B	200	720	3640
C	500	600	3700
D	1600	50	3425

El *máximo beneficio* es de 3700€, vendiendo 500 tarrinas pequeñas y 600 grandes.