MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2022
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2022 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se dispone de tres urnas idénticas con bolas de colores dentro. La primera urna tiene 6 blancas y 4 negras. La segunda tiene 5 blancas y 2 negras y la tercera tiene 4 blancas y 7 negras.

a) (0.5 puntos) Se extrae una bola de una urna elegida al azar. Haz un diagrama con las probabilidades de los posibles resultados.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra de una urna elegida al azar.

c) (1 punto) Se ha hecho una extracción de una bola al azar y ha resultado ser blanca. Calcula la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A)

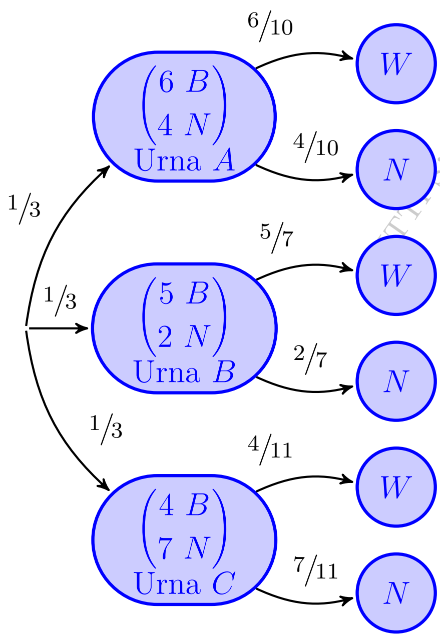
Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "Se elige la urna A" $\qquad B \equiv$ "Se elige la urna B"

$C \equiv$ "Se elige la urna C" $\qquad W \equiv$ "Se extrae bola blanca"

$N \equiv$ "Se extrae bola negra"



a) $P(N) = P\big((A\cap N)\cup(B\cap N)\cup(C\cap N)\big)$

$P(A\cap N)+P(B\cap N)+P(C\cap N)$

$P(A)\cdot P(N\mid A)+P(B)\cdot P(N\mid B)$

$+P(C)\cdot P(N\mid C) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{10}$

$+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{7}{11} = \dfrac{509}{1155} = 0.4407$

b) $$P(A\mid W) = \frac{P(A\cap W)}{P(W)} = \frac{P(A)\cdot P(W\mid A)}{1-P(N)}$$

$$= \frac{1/3\cdot 6/10}{1-0.4407} = 0.3576$$

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se ha observado que el número de horas que dedican a caminar cada semana las personas adultas que viven en Canarias sigue una distribución normal de media 5.25 *horas, con una desviación típica de* 1.25 *horas. En esta población:*

a) (0.75 puntos) Se elige una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dedique a caminar más de 6 *horas?*

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas a caminar por una muestra de 64 *personas sea inferior a* 5 *horas.*

c) (0.75 puntos) En una muestra de 1000 *personas, ¿cuál es el número esperado de personas que caminan al menos* 5.5 *horas a la semana?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo dedicado a caminar (horas/semana)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(5.25, 1.25)$$

a) $P(X > 6) = P\left(Z > \dfrac{6 - 5.25}{1.25}\right) = P(Z > 0.6) = 1 - P(Z < 0.6) = 1 - 0.7257$
$= 0.2743$

b) $X : \mathcal{N}(5.25, 1.25) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(5.25, \dfrac{1.25}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(5.25, 0.1562)$

$P(\overline{X} < 5) = P\left(Z < \dfrac{5 - 5.25}{0.1562}\right) = P(Z < -1.6) = P(Z > 1.6) = 1 - P(Z < 1.6)$
$= 1 - 0.9452 = 0.0548$

c) $P(X > 5.5) = P\left(Z > \dfrac{5.5 - 5.25}{1.25}\right) = P(Z > 0.2) = 1 - P(Z < 0.2) = 1 - 0.5793$
$= 0.4207$

La probabilidad de que una persona camine al menos 5.5 horas es de 0.4207.
Si tenemos una población de 1000 personas habrá $1000 \cdot 0.4207 \simeq 420.7 \implies 421$ personas que lo consigan.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

En un estudio realizado por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de una Universidad se lee el siguiente informe: "Se ha tomado una muestra del número de fotocopias (en miles), realizadas en 16 *departamentos de la Universidad en una semana, y el intervalo de confianza al* 95 % *para el número medio de fotocopias ha sido* (17.9; 24.1)*". Según esta información:*

a) (0.5 puntos) ¿Cuál fue el número medio muestral de fotocopias?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál fue la desviación típica?

c) (1.25 puntos) Determinar un intervalo de confianza al 90 % *para el número medio de fotocopias (en miles).*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Número de fotocopias realizadas (miles)”}$$
$$X : \mathcal{N}(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=16} I.C._{95\,\%}(\mu) = (17.9; 24.1)$$

a) $\overline{x} = \dfrac{17.9 + 24.1}{2} = 21$

b) $1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = \dfrac{24.1 - 17.9}{2} = 3.1 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 3.1 = 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{16}} \implies \boxed{\sigma = 6.327}$

c) $X : \mathcal{N}(\mu, 6.327) \xrightarrow{n=16} \overline{x} = 21 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.9$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{6.327}{\sqrt{16}} = 2.602$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (18.398; 23.602)}$

Luego el intervalo de confianza es (18398; 23602) fotocopias.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Se ha realizado una encuesta entre los médicos de los distintos centros sanitarios de las islas para evaluar la proporción de médicos que han sufrido episodios de ansiedad durante el último año. En la encuesta participaron 350 médicos elegidos al azar entre los distintos centros, de los cuales 84 manifestaron haber tenido al menos uno de estos episodios en el último año.

a) *(1.25 puntos) ¿Cuál es la proporción de médicos de la muestra que han sufrido episodios de ansiedad el último año? Calcular un intervalo de confianza al 94 % para dicha proporción en la población de médicos de las islas.*

b) *(0.75 puntos) Utilizando la proporción obtenida en el apartado anterior como estimador de la proporción de médicos con episodios de ansiedad. ¿de qué tamaño debe ser la muestra de médicos si se desea construir el intervalo anterior con un error máximo de 0.02?*

c) *(0.5 puntos) ¿Cuál ha sido el nivel de confianza empleado si, con los mismos datos, el intervalo de confianza obtenido es (0.1905; 0.2895)?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque B)

Solución.

a) $n = 350 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{84}{350} = 0.24 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.76 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.94$

$$1 - \alpha = 0.94 \implies \alpha = 0.06 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.03 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.97 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.88$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{350}} = 0.043$$

$$I.C._{94\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{94\,\%}(p) = (0.197; 0.283)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.02 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.94$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{n}} < 0.02 \implies n \geq \left(\frac{1.88}{0.02}\right)^2 \cdot 0.24 \cdot 0.76 = 1611.63$$

$$\implies \boxed{n = 1612}$$

c) $n = 350 \quad \& \quad \hat{p} = 0.24 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.76 \quad \& \quad I.C. = (0.1905; 0.2895)$

$$E = \frac{0.2895 - 0.1905}{2} = 0.0495$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \implies 0.0495 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{350}} \implies z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$z_{\alpha/2} = 2.17 \xrightarrow{Tabla} 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.9850 \Rightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.015 \Rightarrow \alpha = 0.03 \implies \boxed{1 - \alpha = 0.97}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

De acuerdo con los datos disponibles, el número mensual de casos activos de COVID19, por cada 100000 personas mayores de 70 años en Canarias entre marzo y diciembre de 2020, puede aproximarse mediante la función:

$$C(t) = \begin{cases} -15t^2 + 150t - 315 & , si\ 3 \leq t \leq 6.5 \\ \dfrac{53}{8}t - \dfrac{269}{16} & , si\ 6.5 < t \leq 8.5 \\ -18t^2 + 360t - 1720 & , si\ 8.5 < t \leq 12 \end{cases}$$

, donde t es el tiempo (en meses) transcurrido desde el 1 de enero de 2020.

a) *(0.5 puntos) Representar gráficamente esta función. ¿Es continua?*

b) *(1.5 puntos) Describir la variación de la curva de casos activos (cuando crece y cuando decrece) ¿Cuándo se produjeron los picos del número de casos activos de COVID en estas personas? ¿Cuántos casos activos había en esos momentos?*

c) *(0.5 puntos) ¿En qué momento se alcanzaron por primera vez los 62 casos activos por cada 100000 personas de este grupo de edad?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A)

Solución.

a) `Continuidad en` $t = 6.5$:

- $\lim\limits_{t \to 6.5^-} C(t) = \lim\limits_{t \to 6.5} (-15t^2 + 150t - 315) = 26.25$
- $\lim\limits_{t \to 6.5^+} C(t) = \lim\limits_{t \to 6.5} \left(\dfrac{53}{8}t - \dfrac{269}{16}\right) = 26.25$
- $C(6.5) = -15 \cdot 6.5^2 + 150 \cdot 6.5 - 315 = 26.25$

Como $\lim\limits_{t \to 6.5^-} C(t) = \lim\limits_{t \to 6.5^+} C(t) = C(6.5) \implies C(t)$ es continua en $t = 6.5$

`Continuidad en` $t = 8.5$:

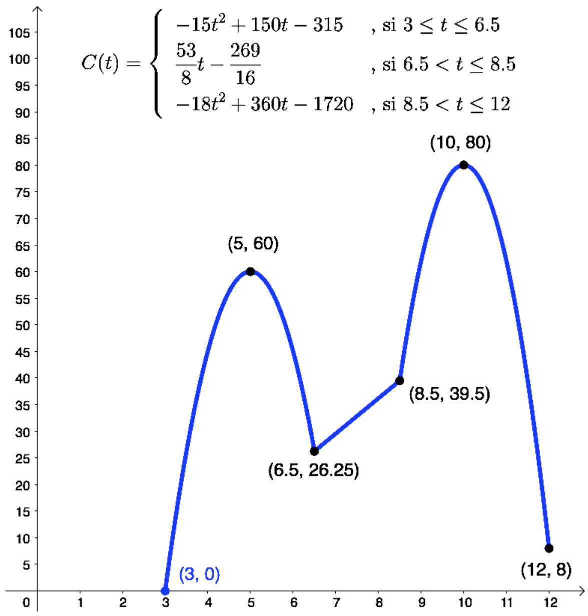
- $\lim\limits_{t \to 8.5^-} C(t) = \lim\limits_{t \to 8.5} \left(\dfrac{53}{8}t - \dfrac{269}{16}\right) = 39.5$
- $\lim\limits_{t \to 8.5^+} C(t) = \lim\limits_{t \to 8.5} (-18t^2 + 360t - 1720) = 39.5$
- $C(8.5) = \dfrac{53}{8} \cdot 8.5 - \dfrac{269}{16} = 39.5$

Como $\lim\limits_{t \to 8.5^-} C(t) = \lim\limits_{t \to 8.5^+} C(t) = C(8.5) \implies C(t)$ es continua en $t = 6.5$

Para representar la función tendremos en cuenta que:

- $C(t) = -15t^2 + 150t - 315$ es una parábola cóncava ($\cap$) con vértice en el punto $t_v = \dfrac{-150}{2 \cdot (-15)} = 5 \implies (5, 60)$ y cortes con el eje OX en $(3, 0)$ y $(7, 0)$.
- $C(t) = \dfrac{53}{8}t - \dfrac{269}{16}$ es una recta creciente que pasa por $\left(0, -\frac{269}{16}\right)$ y $\left(\frac{269}{106}, 0\right)$.
- $C(t) = -18t^2 + 360t - 1720$ es una parábola cóncava ($\cap$) con vértice en el punto $t_v = \dfrac{-360}{2 \cdot (-18)} = 10 \implies (10, 80)$

b) El número de casos activos $C(t)$ es *creciente* en $(3,5)\cup 6.5, 10$ y *decreciente* en $(5, 6.5) \cup (10, 12)$. Tiene dos máximos relativos en los meses $t = 5$ y $t = 10$, con un número de casos activos por cada 100000 habitantes de 60 y 80 respectivamente.



c) Como el máximo de casos $C_1(t) = -15t^2 + 150t - 31$ es inferior a 62 y en $C(t) = \frac{53}{8}t - \frac{269}{16}$ no se superan los 40 casos activos, la primera vez que se alcancen los 62 casos ha de estar en $8.5 < t \leq 12$

$$C(t) = -18t^2 + 360t - 1720 = 62$$

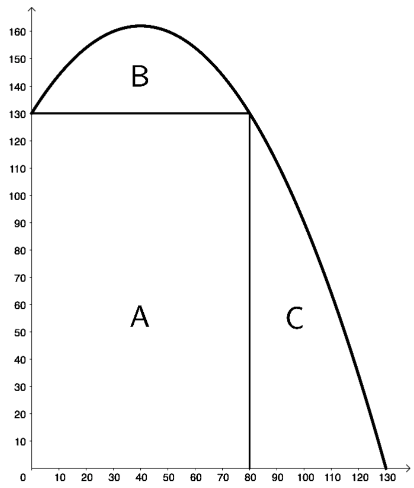
$$-18t^2 + 360t - 1782 = 0$$

$$\implies t = \{9, 11\}$$

Luego la primera vez que se alcanzaron los 62 casos activos fue en $t = 9$ meses.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Un agricultor dispone de un terreno cuya forma coincide con el área limitada entre los ejes de coordenadas y la parábola $f(x) = -0.02x^2 + 1.6x + 130$. El agricultor ha dividido el terreno en tres parcelas A, B y C tal como se muestra en la figura adjunta. Las lineas que dividen las parcelas corresponden, respectivamente, a las rectas $x = 80$ e $y = 130$ (las distancias se miden en metros).



a) *(1.75 puntos) Calcular la superficie de cada parcela.*

b) *(0.75 puntos) El agricultor dedicará una de las parcelas a plantar trigo, otra a plantar millo y la tercera a plantar cebada. El coste total anual de producción de toda la finca (mano de obra, maquinaria, semillas, agua, transporte, etc.) asciende a 22134€. Si el trigo le produce un ingreso anual de 4 €/m^2, el millo 3.5 €/m^2, y la cebada 2 €/m^2, ¿Qué deberá plantar el agricultor en cada parcela si quiere maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio total anual?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque B)

Solución.

a) Llamamos $f(x) = -0.02x^2 + 1.6x + 130 \quad \& \quad g(x) = 130$

$$A = 80 \cdot 130 = 10400\ m^2$$

$$B = \int_0^{80} \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_0^{80} \left(-0.02x^2 + 1.6x + \cancel{130} - \cancel{130}\right) dx$$

$$= \int_0^{80} \left(-0.02x^2 + 1.6x\right) dx = -\frac{0.02x^3}{3} + 0.8x^2 \Big]_0^{80} = \left(-\frac{10240}{3} + 5120\right) - 0$$

$$= \frac{5120}{3} \simeq 1706.67\ m^2$$

$$C = \int_{80}^{130} f(x)\, dx = \int_{80}^{130} \left(-0.02x^2 + 1.6x + 130\right) dx = -\frac{0.02x^3}{3} + 0.8x^2 + 130x \Big]_{80}^{130}$$

$$= \left(-\frac{10240}{3} + 5120 + 10400\right) - \left(-\frac{43940}{3} + 13520 + 16900\right) = \frac{47320}{3} - \frac{36320}{3}$$

$$= \frac{11000}{3} \simeq 3666.67\ m^2$$

b) Para maximizar el beneficio hay que plantar las cosechas que más ingresos producen en las parcelas más grandes:

$$A \to \text{Trigo} \quad \& \quad B \to \text{Cebada} \quad \& \quad C \to \text{Millo}$$

El beneficio ($\mathcal{B}$) en ese caso será la diferencia entre Ingresos ($\mathcal{I}$) y Costes ($\mathcal{C}$):

$$\mathcal{B} = \mathcal{I} - \mathcal{C} = 4 \cdot 10400 + 3.5 \cdot \frac{11000}{3} + 2 \cdot \frac{5120}{3} - 22134 \implies \boxed{\mathcal{B} = 35712.67\ euros}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Por cierre de campaña, un vivero de frutales necesita vender 350 aguacateros y 400 mangos. Anuncia dos ofertas: la oferta A consiste en un lote con una planta de aguacate y dos de mango por 40€, la oferta B consiste en un lote con dos plantas de aguacate y una de mango por 45€. Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B.

a) (1 punto) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) (0.5 puntos) Representar la región factible.

c) (1 punto) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A)

Solución.

	Oferta A	Oferta B	Restricciones
Aguacateros	1	2	≤ 350
Mangos	2	1	≤ 400
Precio (€/lote)	40	45	
	≥ 80	≥ 90	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de lotes de la oferta A"
  $y \equiv$ "Nº de lotes de la oferta B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

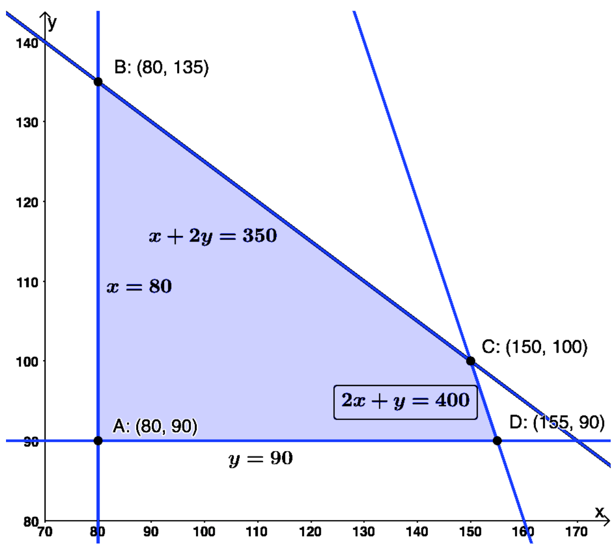
$$\begin{cases} ① \; x + 2y \leq 350 & \rightarrow (0,175) \quad \& \quad (350,0) \\ ② \; 2x + y \leq 400 & \rightarrow (0,400) \quad \& \quad (200,0) \\ ③ \; x \geq 80 & \rightarrow (80,0) \\ ④ \; y \geq 90 & \rightarrow (0,90) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 40x + 45y$ (euros)

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	80	90	7250
B	80	135	9275
C	150	100	10500
D	155	90	10250

La *máxima recaudación* es de 10500€, vendiendo 150 lotes de la oferta A y 100 de la B.



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones de un libro por un total de 19152 euros. Los ejemplares de la tercera edición se vendieron por 36 euros cada uno. Los ejemplares de las dos ediciones anteriores se vendieron con un descuento del 30 % los de la primera edición, y del 40 % los de la segunda (ambos respecto al precio de la tercera edición). Se sabe que el número total de ejemplares vendidos de las dos ediciones anteriores fue la mitad de los de la última edición. ¿Cuántos libros vendió de cada edición?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de ejemplares de la primera edición”} \\ y &\equiv \text{“Nº de ejemplares de la segunda edición”} \\ z &\equiv \text{“Nº de ejemplares de la tercera edición”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=600 \\ 0.7\cdot 36x+0.6\cdot 36y+36z=19152 \\ x+y=\dfrac{z}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=600 \\ 7x+6y+10z=5320 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 7 & 6 & 10 & 5320 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-7F_1 \\ F_3-2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 3 & 1120 \\ 0 & 0 & -3 & -1200 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+80+400=600 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y+3\cdot 400=1120 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z=-1200 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=120 \\ y=80 \\ z=400 \end{array}}$$