MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2022
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 *euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un* 50 %*, las de la empresa B han aumentado en un* 10 % *y, en cambio, las de la empresa C han perdido un* 15 % *de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría* 102000 *euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.*

a) (5 puntos) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales.

b) (5 puntos) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones de cada empresa.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Cantidad invertida en acciones de la empresa } A \text{ (miles de €)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad invertida en acciones de la empresa } B \text{ (miles de €)”}$$
$$z \equiv \text{“Cantidad invertida en acciones de la empresa } C \text{ (miles de €)”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 1.5x+1.1y+0.85z=102 \\ z=x+y \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z=100 \\ 30x+22y++17z=2040 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 30 & 22 & 17 & 2040 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-30F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -8 & -13 & -960 \\ 0 & 0 & -2 & -100 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+38.75+50=100 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -8y-13\cdot 50=-960 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z=-100 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=11.25 \\ y=38.75 \\ z=50 \end{array}}$$

Luego la sociedad invirtió 11250 € en la empresa A, 38750 € en la empresa B y 50000 € en la empresa C.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1.2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.

a) (4 puntos) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) (4 puntos) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) (2 puntos) Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

	Bolsa A	Bolsa B	Existencias
Cuero ($m^2/bolsa$)	0.9	1.2	≤ 60
Mano obra (horas)	8	4	≤ 400

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº de bolsas tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de bolsas tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

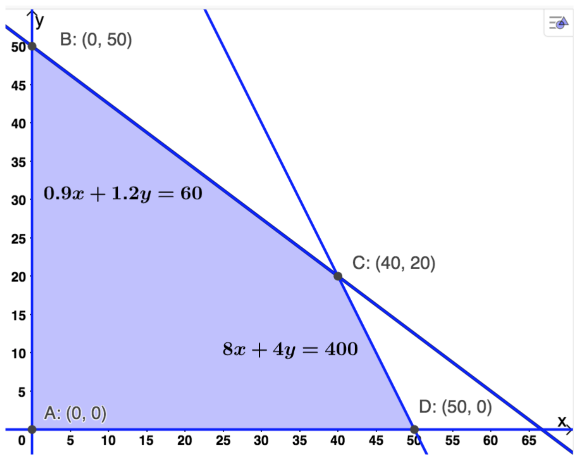
$$\begin{cases} ① \ 0.9x + 1.2y \leq 60 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (20,35) \\ ② \ 8x + 4y \leq 400 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (50,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 30x + 25y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	50	1250
C	40	20	1700
D	50	0	1500



El *máximo beneficio* es de 1700 €, fabricando 40 Bolsas de tipo A y 20 de tipo B.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro a.

a) *(6 puntos) Discuta para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.*

b) *(4 puntos) Encuentre la solución para $a = -2$.*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

a) El sistema es homogéneo, por lo que siempre tendrá solución. Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 0 \\ a & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2a^2 + 22a + 52 = a \cdot (a+1) = 0 \implies a = \{-2, 13\}$$

- Si $a \neq \{-2, 13\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución trivial $x = y = z = 0$).

- Si $a = \{-2, 13\}$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = -2$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow -2x - 4 \cdot (-2\lambda) - 4\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y - 10\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & , \textit{si } x < 0 \\ x^3 + ax + 2 & , \textit{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (5 puntos) Calcule los valore de a para que $f(x)$ sea continua y derivable.

b) (5 puntos) Para $a = 4$ calcule el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & , \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + 2 & , \text{si } x \geq 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + a & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- `Continuidad en` $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 - 3x + 2\right) = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^3 + ax + 2\right) = 2$
  - $f(0) = 0^3 + a \cdot 0 + 2 = 2$

  Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, la función es continua en $x = 0 \; \forall a \in \mathbb{R}$
- `Derivabilidad en` $x = 0$
  - $f'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2x - 3) = -3$
  - $f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(3x^2 + a\right) = a$

  $f(x)$ es derivable en $x = 0 \iff f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right) \implies \boxed{a = -3}$

b) Para $a = 4$ hallamos los cortes de $f(x)$ con el eje OX en el intervalo $[0, 1]$

$x^3 + 4x + 2 = 0$ no tiene raíces enteras pues se ha probado a hacer Ruffini con $\{-1, 1, -2, 2\}$
Por otra parte $f(0) = 2$ y como $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0$ en $[0, 1]$, la función es creciente, por lo que no tiene puntos de corte con el eje OX en ese intervalo.
Esto define un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 \left(x^3 + 4x + 2\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 2x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} + 2 + 2\right) - 0 = \frac{17}{4}$$

$Area = |A_1| = \dfrac{17}{4} \simeq 4.25 \; u^2$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función

$$f(x) = \frac{100x}{b + x^2}$$

en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.

a) *(3 puntos) Encuentre el valor de b para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2 mil euros.*

b) *(4 puntos) Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto?*

c) *(3 puntos) Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros?*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

a) Si el gasto es máximo para $x = 2 \implies f'(2) = 0$

$$f'(x) = \frac{100 \cdot (b + x^2) - 100x \cdot 2x}{(b + x^2)^2} = \frac{-100x^2 + 100b}{(b + x^2)^2}$$

$$f'(2) = 0 \implies \frac{-400 + 100b}{(b + x^2)^2} = 0 \implies -400 + 100b = 0 \implies \boxed{b = 4}$$

Para $b = 4 \implies f(x) = \dfrac{100x}{b + x^2}$ & $f'(x) = \dfrac{-100x^2 + 400}{(b + x^2)^2}$

	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Luego efectivamente para $b = 4$ hay un máximo de $f(x)$ en $x = 2$

b) Para $b = 9 \implies f(x) = \dfrac{100x}{9 + x^2}$

$$f'(x) = \frac{-100x^2 + 900}{(9 + x^2)^2} = 0 \implies -100x^2 + 900 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = -3} \\ x = 3 \end{cases}$$

	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0, 3)$ y *decreciente* en $(3, +\infty)$, y tiene un *máximo relativo* en $(3, 16.67)$.
Por lo tanto el *gasto máximo* en lotería es de 16.67 € que se produce con un salario mensual de 3000 €.

c) Para $b = 9 \implies f(x) = \dfrac{100x}{9+x^2} > 10 \implies \dfrac{100x}{9+x^2} - 10 > 0$

$$\implies \frac{100x - 90 - 10x^2}{9+x^2} > 0 \implies \frac{-10x^2 + 100x - 90}{9+x^2} > 0$$

$$\implies \frac{-10 \cdot (x-1) \cdot (x-9)}{9+x^2} > 0$$

	$(0,1)$	$(1,9)$	$(9,+\infty)$
Signo $\frac{-10\cdot(x-1)\cdot(x-9)}{9+x^2}$	-	+	-

Por lo tanto $f(x) > 10 \ \forall x \in (1,9)$, es decir si los ingresos mensuales están entre 1000 y 9000 €, el gasto en lotería será superior a 10 €.

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1.5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

a) (3 puntos) La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada.

b) (2 puntos) La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada.

c) (3 puntos) El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos.

d) (2 puntos) El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Solución.

a) Sean las incógnitas: $x \equiv$ "Precio de la entrada (€)"
$f(x) \equiv$ "Nº de espectadores en el cine"

Tenemos que $x - 8$ es el precio que excede de 8 €. Si por cada 1.5 € de exceso sobre ese precio se pierden 30 espectadores respecto a los 500 que acuden con el precio a 8 euros la función queda:

$$f(x) = 500 - 30 \cdot \frac{x-8}{1.5} = 500 - 20 \cdot (x-8) \implies \boxed{f(x) = 660 - 20x}$$

b) Ingresos = Nº de entradas $\times$ Precio de la entrada

$I(x) = (660 - 20x) \cdot x \implies \boxed{I(x) = 660x - 20x^2}$

c) $I'(x) = 660 - 40x = 0 \implies x = 16.5$

$f''(x) = -40 \implies f''(16.5) = -40 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máx. en $x = 16.5$

Luego el ingreso máximo es de $I(16.5) = 5445$ € y se produce con un precio de la entrada de 16.5 €.

d) En el caso de que $x = 16.5$, el número de espectadores será $f(16.5) = 330$ espectadores.

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

a) (5 puntos) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1.5 kg.

b) (5 puntos) Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con produccciones en kilogramos:

30 25 4 70 45 60 21 32 9 47

Calcule un intervalo de confianza del 97 % para estimar la produciión media de naranjas por árbol.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Solución.

$$X \equiv \text{“Producción de naranjas (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1.5 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.94$

$1 - \alpha = 0.94 \implies \alpha = 0.06 \implies \alpha/2 = 0.03 \implies 1 - \alpha/2 = 0.97 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.88$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} < 1.5 \implies n > \left(1.88 \cdot \frac{2}{1.5}\right)^2 = 6.28 \implies \boxed{n = 7}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{30+25+4+70+45+60+21+32+9+47}{10} = 34.3 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.97$

$1 - \alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1 - \alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 1.37$$

$$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (32.93; 35.67)}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

En cierta empresa de exportación, el 62.5 % de los empleados habla inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán.

a) (4 puntos) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?

b) (3 puntos) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán?

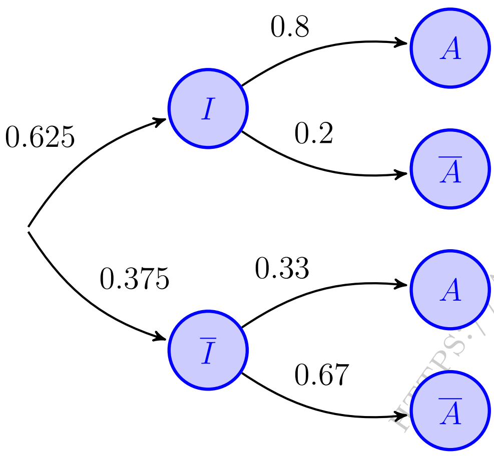
c) (3 puntos) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

Sean los sucesos:

$$I \equiv \text{“El empleado habla inglés”}$$
$$A \equiv \text{“El empleado habla alemán”}$$



a) $P(I \cap A) = P(I) \cdot P(A \mid I) = 0.625 \cdot 0.8 = 0.5$

b)
$$\begin{aligned} P(A) &= P\big((I \cap A) \cup (\overline{I} \cap A)\big) \\ &= P(I \cap A) + P(\overline{I} \cap A) \\ &= P(I) \cdot P(A \mid I) + P(\overline{I}) \cdot P(A \mid \overline{I}) \\ &= 0.625 \cdot 0.8 + 0.375 \cdot 0.3333 = 0.625 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} P(I \mid \overline{A}) &= \frac{P(I \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(I) \cdot P(\overline{A} \mid I)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{0.625 \cdot 0.2}{1 - 0.625} = 0.3333 \end{aligned}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM