MATEMATICAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2022

- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2022 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dado el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -mx + 2y + z = 2 \end{cases}$$

dependiente del parámetro m.

a) (5 puntos) Discuta para qué valores de m el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) (5 puntos) Encuentre la solución para $m = 2$.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) Estudiamos el sistema por el método de Gauss

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -m & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim [C_1 \leftrightarrow C_3] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -m & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -m-3 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow -m-3=0 \Longrightarrow m=-3$$

- Si $m \neq -3 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sist. Comp. Indet. (∞ Soluciones)
- Si $m = -3 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible ($\nexists$ Solución)

b) Resolvemos el sistema para $m = 2$ teniendo en cuenta que, como en la discusión hemos intercambiado $C_1 \leftrightarrow C_3$, las incógnitas $x \leftrightarrow z$ también han sido intercambiadas

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow z + 2\lambda + 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5x = 1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1/5 \\ y = \lambda \qquad\qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8/5 - 2\lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) *(3 puntos) Encuentre los valores de k para los cuales Y es invertible.*

b) *(3 puntos) Encuentre la inversa de Y para $k = 1$.*

c) *(4 puntos) Determine los valores de m y n para los cuales la matriz X satisface*

$$X^2 - 4X + nI = \mathcal{O}$$

, donde I denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{O}$ la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $|Y| = -k - 4 \neq 0 \quad k \neq -4 \implies \exists Y^{-1}\ \forall k \neq -4$

b) Para $k = 1 \implies Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -5 \quad \& \quad Y^{-1} = \dfrac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $X^2 - 4X + nI = \mathcal{O} \implies \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} m^2 - 4m + n & 0 \\ 0 & n - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} m^2 - 4m + n = 0 \xRightarrow{n=3} m = \{1, 3\} \\ n - 3 = 0 \implies n = 3 \end{cases}$$

Por tanto tenemos dos soluciones:

$$\boxed{m = 1 \quad n = 3} \qquad \& \qquad \boxed{m = n = 3}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1.5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

a) (4 puntos) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal.

b) (4 puntos) Dibuje la región factible para la solución indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) (2 puntos) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obteneer un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

	Paquete tipo A	Paquete tipo B	Existencias
Bolsa de pipas (ud.)	1	1	10
Chicles (ud.)	2	4	30
Bombones (ud.)	2	1	18
Precio venta (€/paquete)	1.5	2	18

- `Incógnitas:`

$$x \equiv \text{"Nº de paquetes de tipo } A\text{"}$$
$$y \equiv \text{"Nº de paquetes de tipo } B\text{"}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \; 2x + 4y \leq 30 & \rightarrow (0,7.5) \quad \& \quad (15,0) \\ ③ \; 2x + y \leq 18 & \rightarrow (0,18) \quad \& \quad (9,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

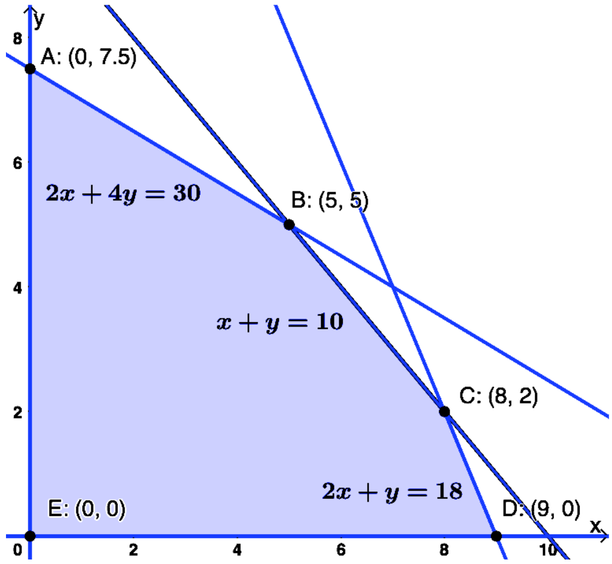
- `Función objetivo:` Queremos maximizar el beneficio.

$$f(x,y) = 1.5x + 2y \text{ (euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	7.5	15
B	5	5	17.5
C	8	2	16
D	9	0	13.5
E	0	0	0



El *máximo beneficio* es de 17.5 €, que se obtiene vendiendo 5 paquetes de cada tipo.

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+3}$

a) *(5 puntos) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

b) *(3 puntos) Encuentre una primitiva de* $f(x)$.

c) *(2 puntos) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función* $f(x)$ *y las rectas* $x=4$, $x=7$ *e* $y=0$.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+3)^2} = \frac{8x+8}{(x-1)^2\cdot(x+3)^2} = 0 \Rightarrow x=-1$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	-	-	+	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-1,1)\cup(1,+\infty)$ y *decreciente* en $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(-1,1)$.

b) $$F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}\right)dx = -\ln|x-1| + \ln|x+3| + C$$
$$= \ln\left|\frac{x+3}{x-1}\right| + C$$

c) Hallamos los cortes con el eje OX:

$$f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} = 0 \implies x+3 = x-1 \implies 4 = 0 \implies \nexists \text{ Solución}$$

La función no corta al eje OX, por lo que entre las rectas $x = 4$ y $x = 7$ define un único recinto de integración $A_1 : (4, 7)$

$$A_1 = \int_4^7 f(x)\, dx = F(7) - F(4) = \ln\left|\frac{10}{6}\right| - \ln\left|\frac{7}{3}\right| = \ln\frac{10/6}{7/3} = \ln\frac{5}{7} \simeq -0.3365$$

$$Area = |A_1| = \left|\ln\frac{5}{7}\right| = \ln\frac{7}{5} \simeq 0.3365\ u^2$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Una academia de inglés cobra una cuota de 50 *euros mensuales y cuenta con* 200 *estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada* 2 *euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan)* 10 *estudiantes.*

a) *(3 puntos) Escribe el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota.*

b) *(2 puntos) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes?*

c) *(5 puntos) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia?*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) Llamamos $x \equiv$ "Precio de la cuota" (€). De esta forma lo que sube la cuota respecto a los 50 € iniciales será $x - 50$. Por cada fracción de 2 € de incremento de cuota, es decir, por cada $\frac{x-50}{2}$ se pierden 10 alumnos, por lo que el número de alumnos será:

$$N(x) = 200 - 10 \cdot \frac{x-50}{2} = 450 - 5x \text{ alumnos}$$

b) $N(x) = 0 \implies 450 - 5x = 0 \implies x = 90$ €

Luego con una cuota de 90 € la academia se quedaría sin alumnos.

c) $I(x) = \text{Cuota} \times \text{Número alumnos} = x \cdot N(x) = 450x - 5x^2$

$I'(x) = 450 - 10x = 0 \implies x = 45$

$I''(x) = -10 \implies I''(45) = -10 < 0 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } x = 45$

Por lo tanto el máximo ingreso es de $I(45) = 10125$ € que se produce con un precio de la cuota de 45 €.

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t) = \frac{20t}{4+t^2} + 40, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

a) (2 puntos) Calcule la población actual (para $t = 0$).

b) (3 puntos) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito.

c) (5 puntos) Determine al cabo de cuantos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $P(0) = \dfrac{20 \cdot 0}{4+0^2} + 40 = 40$ millones de habitantes actualmente

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{20t}{4+t^2} + 40 = 0 + 40 = 40$ millones de habitantes en el futuro

c) $P'(t) = \dfrac{20 \cdot (4+t^2) - 20t \cdot 2t}{(4+t^2)^2} = \dfrac{-20t^2 + 80}{(4+t^2)^2} = 0 \implies \begin{cases} \cancel{t = -2} \\ t = 2 \end{cases}$

	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $P'(x)$	$+$	-
$P(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La población será máxima el segundo año y se situará en $P(2) = \dfrac{20 \cdot 2}{4+2^2} + 40 = 45$ millones de habitantes.

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5.1$ *puntos y desviación típica* $\sigma = 1.6$.

a) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos?

b) (4 puntos) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9?

c) (3 puntos) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

$$X \equiv \text{“Calificación de Física”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(5.1, 1.6)$$

a) $P(X < 4) = P\left(X < \dfrac{4 - 5.1}{1.6}\right) = P(X < -0.69) = P(X > 0.69) = 1 - P(X < 0.69)$

$= 1 - 0.7549 = 0.2451$

b) $X : \mathcal{N}(5.1, 1.6) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(5.1, \dfrac{1.6}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(5.1, 0.2)$

$P(\overline{X} > 5.9) = P\left(\overline{X} > \dfrac{5.9 - 5.1}{0.2}\right) = P(\overline{X} > 4) = 1 - P(\overline{X} < 4) \simeq 1 - 1 = 0$

c) $P(X > 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - 0.2451 = 0.7549$

En un grupo de 50 personas habrá $50 \cdot 0.7549 = 37.745 \simeq 38$ alumnos cuya nota será superior a 4 puntos.

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos tales que

$$P(B \mid A) = 0.9 \quad \& \quad P(A \mid B) = 0.2 \quad \& \quad P(A) = 0.1$$

a) (5 puntos) Calcule $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) (2 puntos) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta.

c) (3 puntos) Calcule $P(A \cap \overline{B})$, donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \implies \dfrac{P(A \cap B)}{0.1} = 0.9 \implies \boxed{P(A \cap B) = 0.09}$

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies \dfrac{0.09}{P(B)} = 0.2 \implies \boxed{P(B) = 0.45}$

b) $\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.09 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.1 \cdot 0.45 = 0.045 \end{array} \implies$ Como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ los sucesos A y B no son independientes

c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.1 - 0.09 \implies \boxed{P(A \cap \overline{B}) = 0.01}$