Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1 Dado el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ -mx + 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

dependiente del parámetro m.

a) Discuta para qué valores de m el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (5 puntos)

b) Encuentre la solución para $m = 2$. (5 puntos)

2 Dadas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de k para los cuales Y es invertible. (3 puntos)

b) Encuentre la inversa de Y para $k = 1$. (3 puntos)

c) Determine los valores de m y n para los cuales la matriz X satisface

$$X^2 - 4X + n\,Id = 0,$$

donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

3 El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1'5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal. (4 puntos)

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

4 Dada la función $f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3}$

a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento. (5 puntos)

b) Encuentre una primitiva de $f(x)$. (3 puntos)

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 4$, $x = 7$ e $y = 0$. (2 puntos)

5 Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan) 10 estudiantes.

a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota. (3 puntos)

b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes? (2 puntos)

c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia? (5 puntos)

6 La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t) = \frac{20t}{4+t^2} + 40, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

a) Calcule la población actual (para $t = 0$). (2 puntos)

b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito. (3 puntos)

c) Determine al cabo de cuantos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo. (5 puntos)

7 En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5.1$ puntos y desviación típica $\sigma = 1.6$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos? (3 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9? (4 puntos)

c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos? (3 puntos)

8 Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(B|A) = 0.9 \quad p(A|B) = 0.2 \quad p(A) = 0.1$$

a) Calcule $p(A \cap B)$ y $p(B)$. (5 puntos)

b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta. (2 puntos)

c) Calcule $p(A \cap \overline{B})$, donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B. (3 puntos)