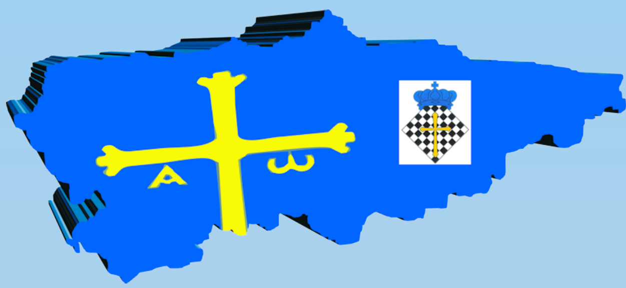
MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2022

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Un inversor ha obtenido un beneficio de 1280 euros después de invertir un total de 22000 euros en dos empresas distintas. Estos beneficios se desglosan como sigue: la cantidad invertida en la primera empresa le ha proporcionado un $m\,\%$ de beneficios y la cantidad invertida en la segunda empresa le ha proporcionado un $6\,\%$ de beneficios.

a) (0.5 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad invertida en cada una de las dos empresas.

b) (2 puntos) Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los beneficios para la primera empreesa sean del $4\,\%$? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el porcentaje de beneficio para lo invertido en la primera empresa. En ese caso, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las dos empresas?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

Solución.

a) $x \equiv$ "Cantidad invertida en la primera empresa (€)"
$y \equiv$ "Cantidad invertida en la segunda empresa (€)"
$m \equiv$ "beneficios otorgados por la primera empresa (%)"

$$\begin{cases} x + y = 22000 \\ 0.01mx + 0.06y = 1280 \end{cases}$$

b) Discutimos el sistema por el método de Rouché

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0.01m & 0.06 & 1280 \end{array}\right) \quad \& \quad |A| = 0.06 - 0.01m = 0 \implies m = 6$$

- Si $m \neq 6$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).
- Si $m = 6 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0.06 & 0.06 & 1280 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 2 \implies \text{ran}(A) = 1$

  $\begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0.06 & 1280 \end{vmatrix} = -40 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 1 \neq \text{ran}(A^*) = 2 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

Por tanto sí es posible que $m = 4$, en cuyo caso la solución del sistema será:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0.04 & 0.06 & 1280 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 0.04F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0.02 & 400 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + y = 22000 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 0.02y = 400 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2000 \\ y = 20000 \end{array}}$$

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En un almacén hay lavadoras y frigoríficos. Por necesidades del mercado el número de frigoríficos debe ser mayor o igual que el de lavadoras, pero no puede superar el doble del de lavadoras. Se necesitan al menos 20 frigoríficos y no hay más de 30 lavadoras disponibles para tener en el almacén. Por cada lavadora se obtiene un beneficio de 200 euros y por cada frigorífico se obtiene un beneficio de 250 euros.

a) (1.75 puntos) ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo se pueden tener en el almacén para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos?

b) (0.75 puntos) ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo habría que tener para maximizar el beneficio al vender todo lo del almacén? ¿y para minimizar el número de lavadoras?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº de lavadoras"
  $y \equiv$ "Nº de frigoríficos"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

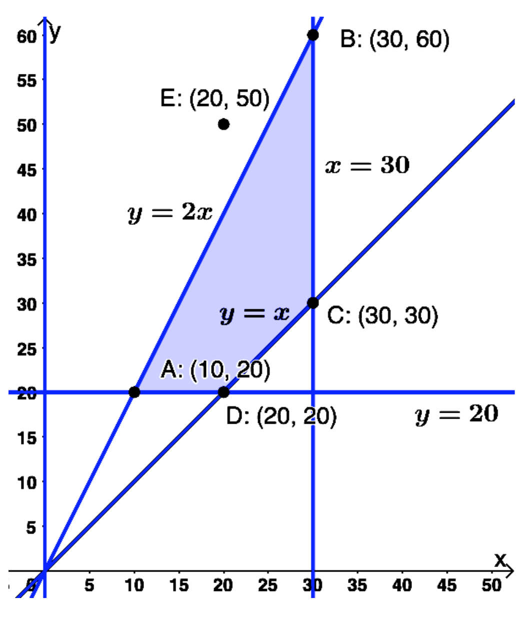
$$\begin{cases} ① \ y \geq x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (10,10) \\ ② \ y \leq 2x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (10,20) \\ ③ \ y \geq 20 & \rightarrow (0,20) \\ ④ \ x \leq 30 & \rightarrow (30,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 200x + 250y$ (€)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	20	7000
B	30	60	21000
C	30	30	13500
D	20	20	9000



Como el punto $(20, 50)$ no pertenece a la región factible, no puede haber 20 lavadoras y 50 frigoríficos

El *máximo beneficio* es de 21000€ vendiendo 30 lavadoras y 60 frigoríficos.

b) Si lo que se quiere es minimizar el número de lavadoras, la función objetivo sería

$$f(x,y) = x$$

Evaluamos la función en los vértices de la región factible

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	20	10
B	30	60	30
C	30	30	30
D	20	20	20

Luego el *número mínimo* de lavadoras en el almacén, respetando todas las restricciones, se consigue con 10 lavadoras y 20 frigoríficos.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

El salario diario (f) de un trabajador durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x) = \begin{cases} 35 & , \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 25 + 10x & , \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -0.5x^2 + 4x + a & , \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

a) *(0.75 puntos) Estudia la continuidad de la función, determinando el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.*

b) *(1.75 puntos) Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento el salario fue máximo? ¿y mínimo?*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = [0, 5]$

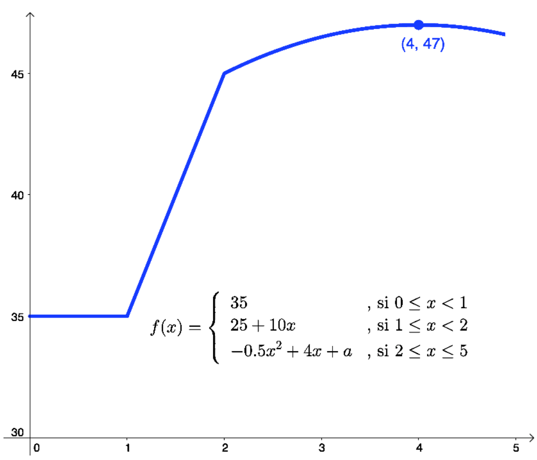
- `Coninuidad en` $x = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 35 = 35$
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (25 + 10x) = 35$
  - $f(1) = 25 + 10 = 35$

  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \implies f(x)$ es continua en $x = 1$
- `Coninuidad en` $x = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (25 + 10x) = 45$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(-0.5x^2 + 4x + a\right) = 6 + a$
  - $f(2) = -0.5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + a = 6 + a$

  $f(x)$ continua en $x = 2 \iff \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \xRightarrow{45=6+a} \boxed{a = 39}$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 10 & , \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 & , \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Como $f''(4) = -1 < 0$ en $[2, 5]$, hay un máximo relativo en $(4, 47)$, que también es absoluto, mientras que el *mínimo* se produce en $(0, 35)$.



Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

> *Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$, se pide:*
>
> a) *(0.5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 0$.*
>
> b) *(2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$.*
>
> *(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B)*

Solución.

a) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int \left(x^2 - 2x - 3\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C \xRightarrow{F(0)=0} C = 0$

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$

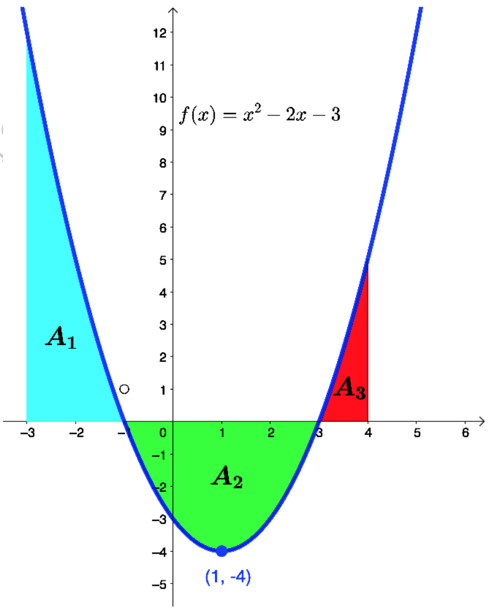
b) $f(x)$ es una parábola convexa, con vértice en $x_v = \dfrac{2}{2} = 1 \implies y_v = f(1) = -4$

Puntos de corte con el eje OX en

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies \{-1, 3\}$$

Esto, junto con las rectas $x = -3$ y $x = 4$ define tres recintos de integración:

$$A_1 : (-3, -1),\ A_2 : (-1, 3) \text{ y } A_3 : (3, 4)$$



$$A_1 = \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = F(-1) - F(-3) = \frac{5}{3} - (-9) = \frac{32}{3}$$
$$A_2 = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx = F(3) - F(-1) = -9 - \frac{5}{3} = -\frac{32}{3}$$
$$A_3 = \int_{3}^{4} f(x)\,dx = F(4) - F(1) = -\frac{20}{3} - (-9) = \frac{7}{3}$$
$$Area = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \frac{32}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{71}{3} \simeq 23.67\ u^2$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

El 30 % de los estudiantes de un instituto hace deporte. De los que hacen deporte, el 40 % toca un instrumento y de los que no hacen deporte, una cuarta parte toca un instrumento. Elegido un estudiante de ese instituto al azar:

a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte, pero no toque un instrumento?

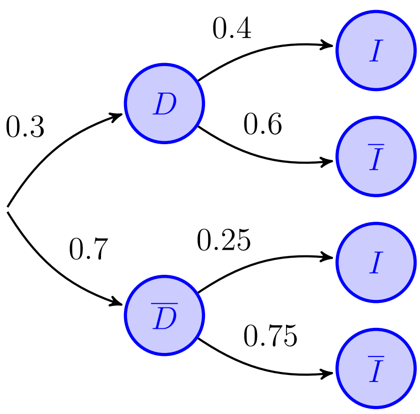
b) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte o toque un instrumento?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$D \equiv \text{“El estudiante hace deporte”}$$
$$I \equiv \text{“El estudiante toca un instrumento”}$$
$$\equiv \text{“”}$$



a) $P(D \cap \overline{I}) = P(D) \cdot P(\overline{I} \mid D) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$

b) $P(D \cup I) = P(D) + P(I) - P(D \cap I)$

$$= P(D) + P\big((D \cap I) \cup (\overline{D} \cap I)\big) - P(D \cap I)$$
$$= P(D) + \cancel{P(D \cap I)} + P(\overline{D} \cap I) - \cancel{P(D \cap I)}$$
$$= P(D) + P(\overline{D}) \cdot P(I \mid \overline{D})$$
$$= 0.3 + 0.7 \cdot 0.25 = 0.475$$

Otra forma:

b) $P(D \cup I) = 1 - P(\overline{D \cup I}) = 1 - P(\overline{D} \cap \overline{I}) = 1 - P(\overline{D}) \cdot P(\overline{I} \mid \overline{D}) = 1 - 0.7 \cdot 0.75$
$= 1 - 0.525 = 0.475$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Una empresa tiene contratados dos operarios, Eva y Juan, para producir determinadas piezas. Eva realiza el 60 % de la producción de esas piezas y el resto lo realiza Juan. Eva obtiene una pieza defectuosa el 10 % de las veces, subiendo ese porcentaje hasta el 25 % en el caso de Juan.

a) (1.25 puntos) Seleccionada una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

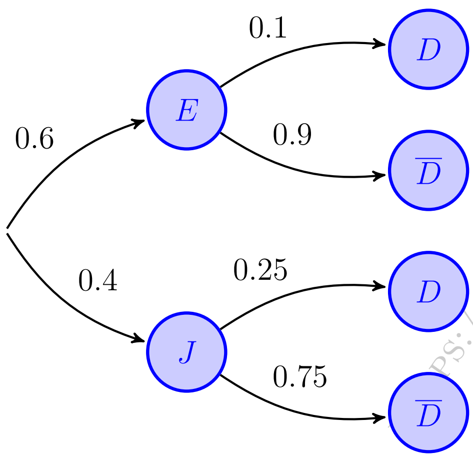
b) (1.25 puntos) Si se encuentra una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido hecha por Juan?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$E \equiv \text{“La pieza la ha producido Eva”}$$
$$J \equiv \text{“La pieza la ha producido Juan”}$$
$$D \equiv \text{“La pieza es defectuosa”}$$



a) $$\begin{aligned} P(D) &= P\big((E\cap D)\cup(J\cap D)\big) \\ &= P(E\cap D)+P(J\cap D) \\ &= P(E)\cdot P(D\mid E)+P(J)\cdot P(D\mid J) \\ &= 0.6\cdot 0.1+0.4\cdot 0.25=0.16 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(J\mid D) &= \frac{P(J\cap D)}{P(D)}=\frac{P(J)\cdot P(D\mid J)}{P(D)} \\ &= \frac{0.4\cdot 0.25}{0.16}=0.62494 \end{aligned}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Se quiere hacer un estudio para estimar la proporción de personas que han viajado a América.

a) (1 punto) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que han viajado a América a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 *y un nivel de confianza del* 90 %*?*

b) (1.5 puntos) En una muestra aleatoria de 2000 *personas, se sabe que* 600 *han viajado a América. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del* 90 %*, un intervalo para estimar la proporción poblacional de personas que han viajado a América.*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A)

Solución.

a) $n = ?\qquad \& \qquad E < 0.05 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$

Como no sabemos el valor de $\hat{p}$, ya que aún no tenemos una muestra, tomaremos aquel valor más desfavorable que es $\hat{p} = 0.5$, ya que maximiza la desviación típica.

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.645\cdot\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} < 0.05 \implies n \geq \left(\frac{1.645}{0.05}\right)^2\cdot 0.5\cdot 0.5 = 270.6$$

$$\implies \boxed{n = 271}$$

b) $n = \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{600}{2000} = 0.3 \quad \& \quad \hat{q} = 1-\hat{p} = 0.7 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.9$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.645\cdot\sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{2000}} = 0.0169$$

$$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p}-E;\hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0.2831; 0.3169)}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

La duración de un tipo de pila, en horas, sigue una distribución normal con desviación típica de 80 *horas.*

a) *(1.5 puntos) Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del* 99 %*, para la duración media de ese tipo de pila, a partir de una muestra de* 100 *pilas, en la que se ha obtenido que la suma de las duraciones de todas ellas ha sido de* 55000 *horas.*

b) *(1 punto) Si el tamaño muestral siguiese siendo de* 100 *pilas, pero la media aumenta, ¿qué le ocurriría a los extremos del intervalo anterior? ¿aumentarían o disminuirían? Y si la media siguiese siendo la misma, pero el tamaño muestral hubiese aumentado, ¿qué le ocurriría a la amplitud del intervalo anterior? ¿aumentaría o disminuiría?*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración de la pila (horas)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 80)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 80) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = \dfrac{55000}{100} = 550 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{80}{\sqrt{100}} = 20.6$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (529.4; 570.6)}$$

b) Debido a que $I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E)$, cuando aumenta la media $\overline{x}$, aumentan los extremos del intervalo en la misma cuantía.

Si aumenta el tamaño muestral, como $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el error disminuye y por tanto la amplitud del intervalo disminuirá también.