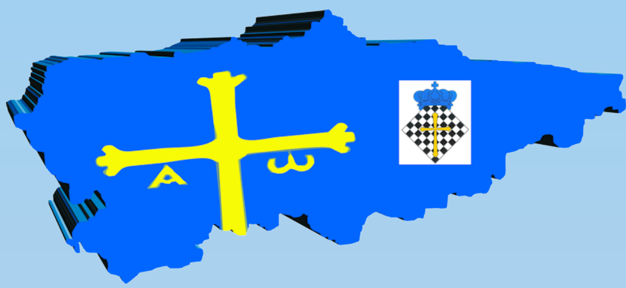
MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2022
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Julio 2022 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

La dueña de una cafetería ha comprado café y leche por un importe total de 2500 euros. Si vende todos estos productos, ganando un 80 % con el café y un m % con la leche, obtiene por ellos un importe total de $2900 + 20m$ euros.

a) (0.5 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el coste de compra del café y la leche.

b) (2 puntos) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir soluciónn, ¿es siempre única? ¿Cuánto costó el café si el beneficio de venta de la leche es del 20 %?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A)

Solución.

a) $x \equiv$ "Coste de compra de la leche (€)"
$y \equiv$ "Coste de compra del café (€)"
$m \equiv$ "beneficios obtenidos por la leche (%)"

$$\text{Precio venta=Coste + Beneficio} \implies \begin{cases} x + y = 2500 \\ (1 + 0.01m)x + 1.8y = 2900 + 20m \end{cases}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

b) Discutimos el sistema por el método de Rouché

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 1 + 0.01m & 1.8 & 2900 + 20m \end{array}\right) \quad \& \quad |A| = 1.8 - (1+0.01m) = 0 \Rightarrow m = 80$$

- Si $m \neq 80$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).
- Si $m = 80 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 1 + 0.01m & 1.8 & 2900 + 20m \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 2 \implies \text{ran}(A) = 1$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2500 \\ 1.8 & 4500 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 1$

  $\text{ran}(A) = 1 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (∞ soluciones)

Por tanto siempre tiene solución y ésta es única si $m \neq 80$. Para $m = 20\,\%$ la solución es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 1.2 & 1.8 & 3300 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 1.2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 0 & 0.6 & 300 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + y = 2500 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 0.6y = 300 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2000 \\ y = 500 \end{array}}$$

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Las pruebas de selección de personal de una empresa consisten, entre otras actividades, en un test de 80 preguntas. Cada pregunta bien contestada suma 1 punto, cada pregunta mal contestada resta 0.5 puntos, no sumando ni restando las preguntas que se dejan sin contestar. Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test.

a) (1.75 puntos) ¿Cuántas preguntas se pueden contestar correctamente y cuántas se pueden fallar para aprobar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podría aprobar contestando exactamente 40 preguntas bien y 20 mal?

b) (0.75 puntos) ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas fallar para aprobar dejando el máximo número de preguntas sin contestar? ¿Cuántos puntos se obtendrían en ese caso?,

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque B)

Solución.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº de preguntas contestadas correctamente"
  $y \equiv$ "Nº de preguntas falladas"

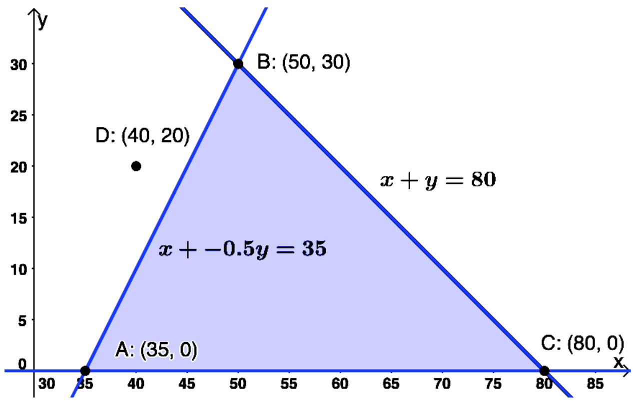
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 80 & \to (0, 80) \quad \& \quad (80, 0) \\ ② \ x - 0.5y \geq 35 & \to (50, 30) \quad \& \quad (35, 0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y
A	35	0
B	50	30
C	80	0



Los puntos de la región factible con coordenadas enteras son los que cumplen todas las restricciones del problema.
El punto $D : (40, 20)$ no está en la región factible por lo que no se puede aprobar con 40 aciertos y 20 fallos.

b) La `Función objetivo` a maximizar es

$$f(x, y) = 80 - x - y$$

, que representa el número de preguntas sin responder. Así que evaluamos ésta en los vértices de la región factible:

Por tanto el *máximo* número de preguntas sin contestar es de 45, aprobando el test si se aciertan 35 y el resto se dejan sin contestar.

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	35	0	45
B	50	30	0
C	80	0	0

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Una empresa ingresa 500 miles de euros por cada tonelada de producto que vende. En cuanto a costes, tiene unos costes de producción, entre mano de obra y materia prima, de 250 miles de euros por cada tonelada que produce. Además, cada año debe pagar como impuestos el $x\,\%$ de sus ingresos, si ha vendido x toneladas de producto. Por último, la empresa tiene unos costes fijos anuales de 1125 miles de euros. Si f representa los beneficios (ingresos - costes) anuales, la producción máxima anual es de 40 toneladas y esta empresa vende cada año todo lo que produce, se pide:

a) (1.75 puntos) Obtener la expresión de la función f en función de x. Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0,40]$.

b) (0.75 puntos) ¿Qué cantidad debe producir en un año para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que producir en un año para que el beneficio sea positivo?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A)

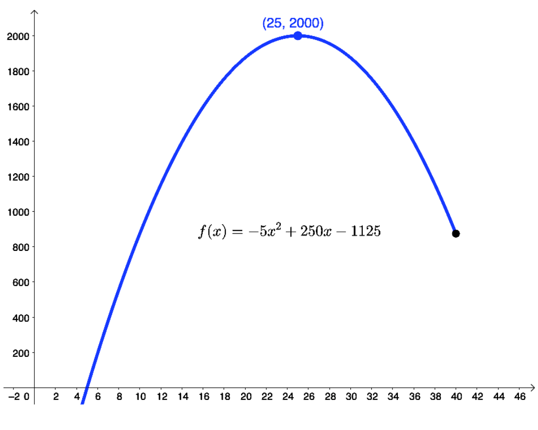
HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Solución.

a)
- `Ingresos:` $I(x) = 500x$ (miles de €)
- `Costes:` $C(x) = 250x + 5x^2 + 1125$ (miles €)
  - `Producción:` $250x$ (miles €)
  - `Impuestos:` $500x \cdot \dfrac{x}{100} = 5x^2$ (miles €)
  - `Costes fijos:` 1125 (miles €)
- `Beneficios:`

$$f(x) = I(x) - C(x) = -5x^2 + 250x - 1125,\ x \in [0,40] \text{ (miles €)}$$

La función beneficios $f(x)$ es una parábola cóncava con vértice en $x_v = \dfrac{-250}{2\cdot(-5)} = 25 \implies y_v = f(25) = 2000$, y cortes con el eje OX en $x = 5$ y $x = 45$, pero solo el primero de ellos pertenece al dominio.



b) $f'(x) = -10x + 250 = 0 \implies x = 25$

$f''(x) = -10 \implies f''(25) = -10 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$
Máx. en $(25, f(25)) = (25, 2000)$
El beneficio es positivo para una producción entre 5 y 40 toneladas.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, se pide:

a) (0.5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.

b) (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 4$.

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque B)

Solución.

a) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C \xrightarrow{F(1)=1} C = \frac{7}{12}$

$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{7}{12}$

b)

- `Corte` OX: $x^3 - 4x^2 + 3x = x \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0 \implies \{0, 1, 3\}$

- `Monotonía:` $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0 \implies x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$

	$\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$	$\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$	$\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ y *decreciente* en $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$, y tiene un *mínimo relativo* en $x = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ y un *máximo relativo* en $x = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$.

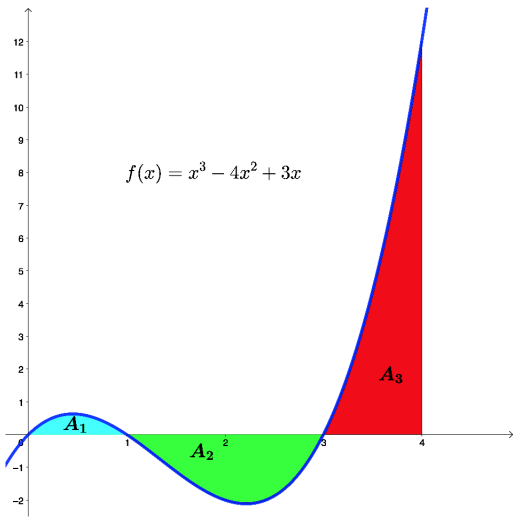
- `Curvatura:` $f''(x) = 6x - 8 = 0 \implies x = \frac{4}{3}$

	$(-\infty, 4/3)$	$(4/3, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

La función en *convexa* ($\cup$) en $(4/3, +\infty)$ y *cóncava* ($\cap$) en $(-\infty, 4/3)$ y tiene un *punto de inflexión* en $x = 4/3$.

$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$
$$A_2 = \int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1) = -\frac{5}{3} - 1 = -\frac{8}{3}$$
$$A_3 = \int_3^4 f(x)\,dx = F(4) - F(3) = \frac{13}{4} - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{59}{12}$$
$$Area = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} + \frac{59}{12} = 8\ u^2$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Una empresa láctea se encarga de procesar leche y envasarla en botellas. De estas, el 70 % son de leche entera, el 20 % de leche semidesnatada y el resto de leche desnatada. Además se sabe que el 5 % de las botellas de leche entera se exportan fuera del país, así como el 3 % de las de leche semidesnatada y el 10 % de las de leche desnatada.

a) (1.25 puntos) Si se elige una botella al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea exportada?

b) (1.25 puntos) Si se elige una botella al azar de entre las exportadas, ¿cuál es la probabilidad de que contenga leche semidesnatada?

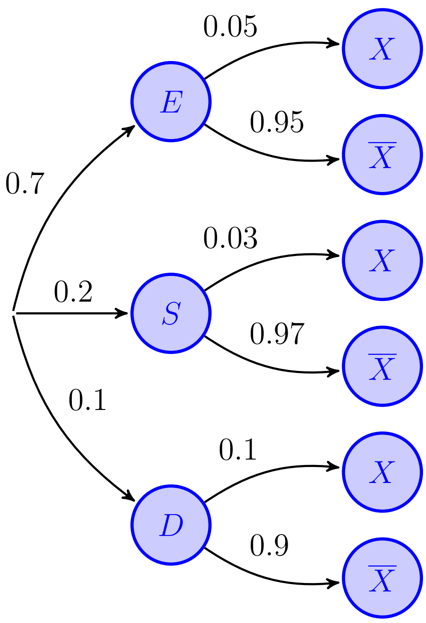
(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A)

Solución.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

$E \equiv$ "La leche es entera" $\qquad S \equiv$ "La leche es semidesnatada"

$D \equiv$ "La leche es desnatada" $\qquad X \equiv$ "La leche se exporta"



a)
$$\begin{aligned} P(\overline{X}) &= P\Big((E\cap\overline{X})\cup(S\cap\overline{X})\cup(D\cap\overline{X})\Big) \\ &= P(E\cap\overline{X}) + P(S\cap\overline{X}) + P(D\cap\overline{X}) \\ &= P(E)\cdot P(\overline{X}\mid E) + P(S)\cdot P(\overline{X}\mid S) \\ &+ P(D)\cdot P(\overline{X}\mid D) = 0.7\cdot 0.95 \\ &+ 0.2\cdot 0.97 + 0.1\cdot 0.9 = 0.949 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(S\mid X) &= \frac{P(S\cap X)}{P(X)} = \frac{P(S)\cdot P(X\mid S)}{1-P(\overline{X})} \\ &= \frac{0.2\cdot 0.03}{1-0.949} = 0.1176 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

En la segunda vuelta de unas elecciones presidenciales el 40 % de los votantes votan al candidato A y el 60 % restante al B. De los votantes del candidato A, el 25 % son mujeres, mientras que un 20 % de los votantes del candidato B son hombres.

a) (1.25 puntos) Calcula la probabilidad de que un votantes, elegido al azar sea mujer.

b) (1.25 puntos) Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar entre los hombres, haya votado al candidato A.

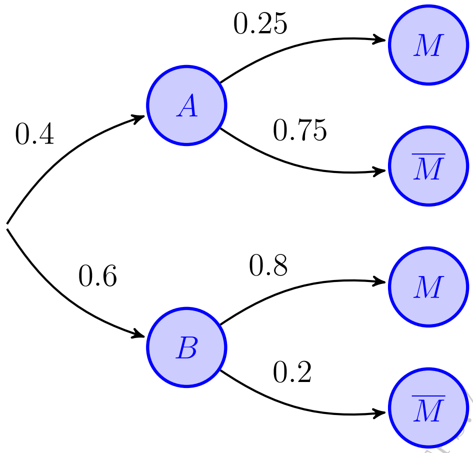
(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque B)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "Se vota al candidato A" $\qquad$ $B \equiv$ "Se vota al candidato B"

$M \equiv$ "El votante es mujer" $\qquad$ $\overline{M} \equiv$ "El votante es hombre"



a) $$P(M) = P\big((A \cap M) \cup (B \cap M)\big) = P(A \cap M) + P(B \cap M) = P(A) \cdot P(M \mid A) + P(B) \cdot P(M \mid B) = 0.4 \cdot 0.25 + 0.6 \cdot 0.8 = 0.58$$

b) $$P(A \mid \overline{M}) = \frac{P(A \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{M} \mid A)}{1 - P(M)} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{1 - 0.58} = 0.7143$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Para estudiar el tiempo medio que tarda la compañía PhoneFun *en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono, se consideró una muestra aleatoria de* 200 *clientes y se obtuvo que el tiempo medio de portabilidad para ellos fue de* 40 *horas. Se supone que el tiempo de portabilidad se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica* 10 *horas.*

a) (1.5 puntos) Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio de portabilidad en esa compañía, al 90 % *de confianza.*

b) (1 punto) ¿Cuál sería el número mínimo de clientes en la muestra necesario para estimar el verdadero tiempo medio de portabilidad en esa compañía mediante un intervalo de amplitud menor o igual a 2 *horas y un nivel de confianza del* 90 %*?*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo en hacer la portabilidad (horas)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=200} \overline{x} = 40 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{200}} = 1.16$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (38,84; 41.16)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 2 \implies E \leq 1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 1 \implies n \geq \left(1.645 \cdot \frac{10}{1}\right)^2 = 270.6 \implies \boxed{n = 271}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

En una determinada ciudad se ha seleccionado una muestra aleatoria de 300 hogares, de los que 240 reciclan sus envases de plástico habitualmente.

a) (1.5 puntos) Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de hogares que reciclan el plástico habitualmente en esa ciudad.

b) (1 punto) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría a la amplitud del intervalo si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque B)

Solución.

a) $n = 300 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{240}{300} = 0.8 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.2 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{300}} = 0.045$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.755; 0.845)}$$

b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{0.8 \cdot 0.2}{300}} = 0.045$

Si el tamaño de la muestra aumenta, manteniendo constantes el nivel de confianza y la proporción muestral, se reduce el error y por tanto la amplitud del intervvalo de confianza.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM