MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JUNIO 2022

## - Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Junio 2022 (Ordinario)

**Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)**

*Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

*a) (3 puntos) Calcule el valor de $m$ para que la ecuación matricial $X \cdot A = B$ tenga solución única.*

*b) (4 puntos) Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial anterior.*

*c) (3 puntos) Resuelva el sistema de ecuaciones* $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

*(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

**Solución.**

a) $|A| = -7m + 8 \neq 0 \implies m \neq \dfrac{8}{7} \implies \exists A^{-1}\ \forall m \neq \dfrac{8}{7}$, en cuyo caso la solución de la ecuación matricial será:

$$X \cdot A = B \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = B \cdot A^{-1} \implies \boxed{X = B \cdot A^{-1}}$$

b) Si $m = 1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ & $|A| = 1$ & $\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}}$$

c) $B \cdot X = O$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\, F_3 \leftrightarrow F_1 \,\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\, F_2 - F_1 \,\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -\lambda \ ,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

**Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)**

*Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de* 100000 *euros para su apertura y generan unos ingresos de* 15000 *euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a* 6 *personas, requieren de* 150000 *euros de inversión y generan un ingreso de* 18000 *euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a* 25 *y se han comproetido a crear como mínimo* 60 *empleos.*

*a) (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.*

*b) (5 puntos) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.*

*c) (2 puntos) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?*

*(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*



**Solución.**

| | Sucursal rural | Sucursal urbana | Restricciones |
|---|---|---|---|
| Personas contratadas | 3 | 6 | $\geq 60$ |
| Inversión (€) | 100000 | 150000 | $\leq 3000000$ |
| Ingresos (€/mes) | 15000 | 18000 | |

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de sucursales rurales”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de sucursales urbanas”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

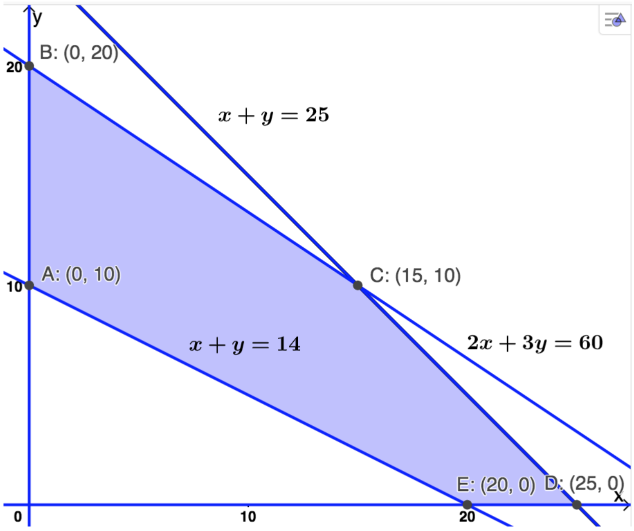
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 25 \\ ② \; 3x + 6y \geq 60 \\ ③ \; 100000x + 150000y \leq 3000000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \; x + y \leq 25 & \to (0,25) \quad \& \quad (25,0) \\ ② \; x + 2y \geq 20 & \to (0,10) \quad \& \quad (20,0) \\ ③ \; 2x + 3y \leq 60 & \to (0,20) \quad \& \quad (30,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` Hallamos la función Ingresos

$$f(x,y) = 15x + 18y \text{ (miles de €/mes)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $f(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 10 | 180 |
| B | 0 | 20 | 360 |
| C | 15 | 10 | 405 |
| D | 25 | 0 | 375 |
| E | 20 | 0 | 300 |




Los *ingresos mensuales máximos* son de 405000 € y se consiguen con la apertura de 15 sucursales rurales y 10 urbanas.

c) Con esta solución

- Se crean $3 \cdot 15 + 6 \cdot 10 = 105$ empleos
- Se invierten $100000 \cdot 15 + 150000 \cdot 10 = 3000000$ €, consumiendo todos los recursos disponibles.

**Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)**

*En una empresa el coste total, en euros, de producir $q$ unidades viene dado por:*

$$C(q) = 300q - 10q^2 + \frac{q^3}{3}$$

*a) (3 puntos) Calcule la función coste marginal ($C_m(q) = C'(q)$) ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?*

*b) (3 puntos) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q}$*

*c) (4 puntos) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q) = 240-2q$. Determine para qué nivel de produción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).*

*(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

**Solución.**

a) $C_m(q) = C'(q) = 300 - 20q + q^2 \quad \& \quad C'_m(q) = -20 + 2q = 0 \implies q = 10$

| | $(0,10)$ | $(10,+\infty)$ |
|---|---|---|
| Signo $C'_m(q)$ | - | + |
| $C_m(q)$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |

El coste marginal $C_m(q)$ es *creciente* a partir de una producción $q > 10$.

b) $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q} = 300 - 10q + \dfrac{q^2}{3} \quad \& \quad CM'(q) = -10 + \dfrac{2q}{3} = 0 \implies q = 15$

| | $(0,15)$ | $(15,+\infty)$ |
|---|---|---|
| Signo $CM'(q)$ | - | + |
| $CM(q)$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |

El coste medio $CM(q)$ es *mínimo* con una producción $q = 15$ unidades.

c) $B(q) = I(q) - C(q) = q \cdot P(q) - C(q) = q \cdot (240 - 2q) - \left(300q - 10q^2 + \dfrac{q^3}{3}\right)$

$= -\dfrac{q^3}{3} + 8q^2 - 60q$

$B'(q) = -q^2 + 16q - 60 = 0 \implies q = \{6, 10\}$

$$B''(q) = -2q + 16 \implies \begin{cases} B''(6) = 4 > 0 \overset{(\cup)}{\Longrightarrow} \text{Mínimo en } q = 6 \\ B''(10) = -4 < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \boxed{\text{Máximo en } q = 10} \end{cases}$$

**Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)**

*Siendo $a$, $b$ parámetros reales, se considera la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & , \text{ si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & , \text{ si } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{6} & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

*a) (3 puntos) Determine el valor de los parámetros para que $f(x)$ sea continua.*

*b) (4 puntos) Para dichos valores, analice si $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.*

*c) (3 puntos) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ si $x \in [6, 9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.*

*(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

**Solución.**



a)

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- `Continuidad en` $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 + 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{ax+b} = \sqrt{b}$
  - $f(0) = 0^2 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

  $f(x)$ continua en $x = 0 \iff \lim\limits_{x\to 0^-} = \lim\limits_{x\to 0^+} = f(0) \Rightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{b} \implies \boxed{b = 12}$
- `Continuidad en` $x = 3$
  - $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \sqrt{ax+b} = \sqrt{3a+12}$
  - $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{6}\right) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{6} = 3$
  - $f(3) = \sqrt{3a+12}$

  $f(x)$ cont. en $x = 3 \iff \lim\limits_{x\to 3^-} = \lim\limits_{x\to 3^+} = f(0) \Rightarrow \sqrt{3a+12} = 3 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

b) Para $a = -1$ y $b = 12$ la función queda:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & , \text{ si } x \leq 0 \\ \sqrt{-x+12} & , \text{ si } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{6} & , \text{ si } x > 3 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x+12}} & , \text{ si } 0 < x < 3 \\ -\dfrac{1}{6} & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

- `Derivabilidad en` $x = 0$
  - $f'[0^-] = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$
  - $f'[0^+] = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{2\sqrt{-x+12}} = -\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$

  $f'[0^-] \neq f'[0^+] \implies f(x)$ no es derivable en $x = 0$

- `Derivabilidad en` $x = 3$
  - $f'[3^-] = \lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3} -\dfrac{1}{2\sqrt{-x+12}} = -\dfrac{1}{6}$
  - $f'[3^+] = \lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3} -\dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{6}$

  $f'[3^-] = f'[3^+] \implies f(x)$ es derivable en $x = 3$

c) Si $x \in [6, 9] \implies f(x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{6} \quad \& \quad f'(x) = -\dfrac{1}{6} < 0 \implies f(x)$ es decreciente

Máximo en $(6, f(6)) \implies (6, 5/2) \qquad \& \qquad$ Mínimo en $(9, f(9)) \implies (9, 2)$

—————— ○ ——————

**Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)**

*Responde a las dos cuestiones siguientes:*

a) *(6 puntos) Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90 % dice que compra ropa (usada o nueva), el 15 % compra ropa de ambos tipos y el 60 % no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:*

a.1) *(3 puntos) Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.*

a.2) *(3 puntos) Si dice que no compra ropa de segunda mano ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?*

b) *(4 puntos) En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio.*
*Por otro lado el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25 % de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?*

*(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*



**Solución.**

a) Sean los sucesos:

$$N \equiv \text{“El cliente compra ropa nueva”}$$
$$U \equiv \text{“El cliente compra ropa usada”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(N \cup U) = 0.9 \quad \& \quad P(N \cap U) = 0.15 \quad \& \quad P(\overline{U}) = 0.6$$

a.1) $P(N \cap \overline{U}) = P(N \cup U) - P(U) = P(N \cup U) - \left[1 - P(\overline{U})\right] = 0.9 - (1 - 0.6) = 0.5$

a.2) $P(\overline{N} \mid \overline{U}) = \dfrac{P(\overline{N} \cap \overline{U})}{P(\overline{U})} = \dfrac{P(\overline{N \cup U})}{P(\overline{U})} = \dfrac{1 - P(N \cup U)}{P(\overline{U})} = \dfrac{1 - 0.9}{0.6} = 0.1667$

b) $n = 64 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{8}{64} = 0.125 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.875 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.97$

$$1 - \alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.015 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{64}} = 0.0897$$

$$I.C._{97\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(p) = (0.0353; 0.2147)}$$

El porcentaje de jóvenes contrarios al uso de mascarilla se encuentra entre el 8.97 % y el 21.47 %, por lo que no se alcanza el 25 % que exigiría una medida correctora. Por tanto no es necesario aplicar ninguna campaña de concienciación

**Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)**

*Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.*

*a) (4 puntos) Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor a 63 puntos.*

*b) (3 puntos) Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92 %, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8.8 puntos.*

*c) (3 puntos) Determine el tamaño de la mestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b.-).*

*(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2022)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Calificación en la PAU”}$$

a) $X : \mathcal{N}(65, 8) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(65, \dfrac{8}{\sqrt{25}}\right) = \mathcal{N}(65, 1.6)$

$$P(\overline{X} > 63) = P\left(Z > \frac{63-65}{1.6}\right) = P(Z > -1.25) = P(Z < 1.25) = 0.8944$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 8.8) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 80 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.92$

$$1-\alpha = 0.92 \implies \alpha = 0.08 \implies \alpha/2 = 0.04 \implies 1-\alpha/2 = 0.96 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.75$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{8.8}{\sqrt{100}} = 1.54$$

$$I.C._{92\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{92\,\%}(\mu) = (78.46; 81.54)}$$

c) $n = ? \quad \& \quad E \leq \dfrac{1.54}{2} = 0.77 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.92$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{8.8}{\sqrt{n}} \leq 0.77 \implies n \geq \left(1.75 \cdot \frac{8.8}{0.77}\right)^2 = 400 \implies \boxed{n = 400}$$