MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2022
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2022 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Dado el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{l}(m+1)x = m-2\\ 2x+y=-3\\ 3x-2y+mz=-8\end{array}\right\}$$

Se pide:

a) *(3 puntos) Exprese el sistema anterior en forma matricial ($A\cdot X = B$) y determine el valor (es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.*

b) *(3 puntos) ¿Existe algún valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.*

c) *(4 puntos) Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1}\cdot B$, siendo A, B las matrices del apartado a).*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial: $A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 0 & m-2\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & m & -8\end{array}\right)$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m\cdot(m+1) = 0 \implies m = \{-1, 0\}$$

- Si $m \neq \{-1,0\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

b)
- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & -1 & -8\end{array}\right)$

  En la primera ecuación $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible ($\nexists$ solución)
- Si $m = 0$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & 0 & -8\end{array}\right) \begin{array}{l}\Rightarrow x=-2\\ \Rightarrow 2\cdot(-2)+y=-3\\ \Rightarrow 3\cdot(-2)-2\cdot 1 = -8\ \checkmark\end{array} \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \Rightarrow\\ \Rightarrow\end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=-2\\ y=1 \quad ,\lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{array}}$$

Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

c) Como $m = 1 \neq \{-1, 0\}$, $X = A^{-1}\cdot B$ es la solución del sistema $A\cdot X = B$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & 1 & -8\end{array}\right) \begin{array}{l}\Rightarrow 2x=-1\\ \Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+y=-3\\ \Rightarrow 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2\cdot(-2)+z=-8\end{array} \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \Rightarrow\\ \Rightarrow\end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=-1/2\\ y=-2\\ z=-21/2\end{array}}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

Fernanda dispone de 10000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30 % y la de los fondos de inversión sea del 5 %. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3000 euros y un mínimo de 1000 euros.

a) (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.

b) (5 puntos) Resuelva el problema y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.

c) (2 puntos) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35 % para las criptomonedas y 0 % para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1000 euros en criptomonedas y 5000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Inversión en criptomonedas (€)"
  $y \equiv$ "Inversión en fondos (€)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

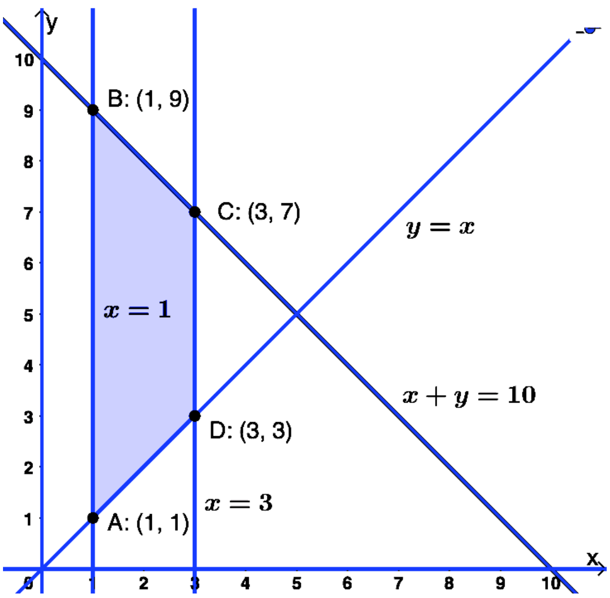
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \; y \geq x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (10,10) \\ ③ \; 1 \leq x \leq 3 & \rightarrow (1,0) \quad \& \quad (3,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0.3x + 0.05y$ (miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	1	1	0.35
B	1	9	0.75
C	3	7	1.25
D	3	3	1.05



El *rendimiento máximo* es de 1250 € y se obtiene invirtiendo 3000 € en criptomoneda y 7000 € en fondos de inversión.

c) La nueva función objetivo es $f(x,y) = 0.35x + 0y$ (en miles).
Evaluamos la misma en los vértices de la región factible que no ha cambiado:

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	1	1	0.35
B	1	9	0.35
C	3	7	1.05
D	3	3	1.05

El *riesgo mínimo* es de 350 y se produce en cualquier punto del segmento que une los vértices $A : (1,1)$ y $B : (1,9)$. El punto $(1,5)$ pertenece a este segmento por lo que en él la función objetivo (riesgo) será mínima.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

Dada $f(x) = 60 + \dfrac{1}{100}\cdot(1-x) + \dfrac{1}{1-x}$. *Se pide:*

a) *(2 puntos) Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.*

b) *(5 puntos) Razone que $f(x)$ tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?*

c) *(3 puntos) Supongamos que x representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x \in [5,21]$ euros por kilo, y $f(x)$ el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

$$f(x) = 60+\frac{1}{100}\cdot(1-x)+\frac{1}{1-x} = \frac{60\cdot 100\cdot(1-x)+(1-x)^2+100}{100\cdot(1-x)} = \frac{x^2-6002x+6101}{100\cdot(1-x)}$$

a)
- `Dominio:` $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- `Asíntota Vertical:` $\exists$ $A.V.$ en $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-6002x+6101}{100\cdot(1-x)} = \left[\frac{100}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{100}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{100}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

- `Asíntota Horizontal:`

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-6002x+6101}{100\cdot(1-x)} = \mp\infty \Longrightarrow \nexists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$$

- `Asíntota Olicua:`

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-6002x+6101}{100x\cdot(1-x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{-100} = -\frac{1}{100}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 6002x + 6101}{100 \cdot (1-x)} + \frac{x}{100} \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - 6002x + 6202 + x - \cancel{x^2}}{100 \cdot (1-x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-6001x + 6202}{100 \cdot (1-x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \frac{-6001}{-100} = \frac{6001}{100} \implies \underset{x \to \pm\infty}{A.O.} \text{ en } y = -\frac{1}{100}x + \frac{6001}{100}$$

b) $$f'(x) = \frac{(2x - 6002) \cdot \cancel{100} \cdot (1-x) - (x^2 - 6002x + 6101) \cdot (-\cancel{100})}{100^{\cancel{2}} \cdot (1-x)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 2x + 99}{100 \cdot (1-x)^2} = 0 \implies x^2 - 2x - 99 = 0 \implies x = (-9, 11)$$

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 1)$	$(1, 11)$	$(11, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	$+$	$+$	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-9, 1) \cup (1, 11)$ y *decreciente* en $(-\infty, -9) \cup (11, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(-9, {}^{301}/_{5})$ y un *máximo relativo* en $(11, {}^{299}/_{5})$.
El valor en el mínimo de la función es mayor que el valor en el máximo.

c) Estudiando la monotonía de la función $f(x)$, entre los valores de $x \in [5, 21]$, el máximo se produce en $x = 11$ €/kg y asciende a $f(11) = \dfrac{299}{5} = 59.8 \to 5980$€.

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

La primera derivada de una cierta función es $f'(x) = x \cdot (x-1)^2$.

a) (3 puntos) ¿En qué intervalo $f(x)$? es creciente y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.

b) (4 puntos) ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de $f(x)$? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$.

c) (3 puntos) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 10$.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

a) $f'(x) = x \cdot (x-1)^2 = 0 \implies x = \{0, 1\}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 1)$, y tiene un *mínimo relativo* en $x = 1$ y un *máximo relativo* en $x = 0$.

b) $f'(x) = x \cdot (x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x \implies f''(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \implies x = \{1/3, 1\}$

	$(-\infty, 1/3)$	$(1/3, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	Convexa $\cup$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

La función $f(x)$ es *cóncava* ($\cap$) en $(1/3, 1)$ y *convexa* ($\cup$) en $(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$, y tiene *puntos de inflexión* en $x = 1/3$ y en $x = 1$.

c) $f(x) = \int f'(x)\, dx = \int \left(x^3 - 2x^2 + x\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C \xrightarrow{f(0)=10} C = 10$

$$\implies f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 10$$

Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

Responde a las siguientes cuestiones:

a) (7 puntos) Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurtos, roturas, daños, etc. de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40 % de su cartera, los móviles representan el 45 % y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51 % de patinetes, un 40 % de teléfonos móviles y un 9 % de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

a.1 (2 puntos) Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

a.2 (2 puntos) Si llegara un parte de siniestro, calcule la probailidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

a.3 (3 puntos) Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

b) (3 puntos) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenía contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 96 % para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

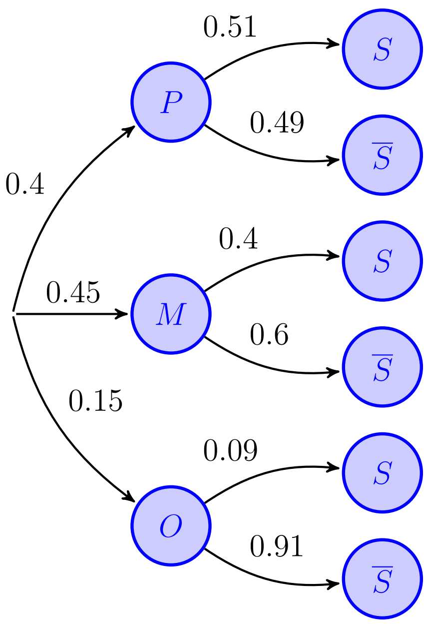
(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

$P \equiv$ "El seguro es de patinete" $\qquad M \equiv$ "El seguro es de teléfono móvil"

$O \equiv$ "El seguro es de ordenador" $\qquad S \equiv$ "Se comunica un siniestro"

a.1) $$P(S) = P\Big((P\cap S)\cup(M\cap S)\cup(O\cap S)\Big) = P(P\cap S)+P(M\cap S)+P(O\cap S)$$
$$= P(P)\cdot P(S\mid P)+P(M)\cdot P(S\mid M)+P(O)\cdot P(S\mid O)$$
$$= 0.4\cdot 0.51+0.45\cdot 0.4+0.15\cdot 0.09 = 0.3975$$



a.2) $$P(M\mid S) = \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{P(M)\cdot P(S\mid M)}{P(S)} = \frac{0.45\cdot 0.4}{0.3975} = 0.45282$$

a.3) $$P(P\mid S) = \frac{P(P\cap S)}{P(S)} = \frac{P(P)\cdot P(S\mid P)}{P(S)} = \frac{0.4\cdot 0.51}{0.3975} = 0.51317$$

$$P(O\mid S) = \frac{P(O\cap S)}{P(S)} = \frac{P(O)\cdot P(S\mid O)}{P(S)} = \frac{0.15\cdot 0.09}{0.3975} = 0.03392$$

Lo más probable es que el siniestro lo haya causado un patinete

b) $n = 100 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{15}{100} = 0.15 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.85 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.96$

$$1 - \alpha = 0.96 \implies \alpha = 0.04 \implies \alpha/2 = 0.02 \implies 1 - \alpha/2 = 0.98 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.055$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{100}} = 0.0733$$

$$I.C._{96\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{96\,\%}(p) = (0.0767; 0.0.2263)}$$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

El tiempo de espera para recibir en casa "tu compra en pocos minutos" se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos^2.

a) (3 puntos) Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

b) (4 puntos) Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

c) (3 puntos) Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza (9.7; 13.5) minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

$$X \equiv \text{" Tiempo de espera para recibir el pedido (minutos)"} \xrightarrow{\sigma^2=16} X : \mathcal{N}(\mu, 4)$$

a) $X : \mathcal{N}(12, 4) \xrightarrow{n=7} \overline{X} : \mathcal{N}\left(12, \dfrac{4}{\sqrt{7}}\right) = \mathcal{N}(12, 1.51)$

$$P(\overline{X} > 10) = P\left(Z > \frac{10 - 12}{1.51}\right) = P(Z > -1.32) = P(Z < 1.32) = 0.9066$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=49} \overline{x} = 12 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.97$

$$1 - \alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1 - \alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{49}} = 1.24$$

$$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (10.76; 13.24)}$$

c) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=16} I.C.(\mu) = (9.7; 13.5)$

$$E = \frac{13.5 - 9.7}{2} = 1.9 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} = 1.9 \implies z_{\alpha/2} = 1.9$$

$$z_{\alpha/2} = 1.9 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.9713 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0287 \Rightarrow \alpha = 0.0574 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.9426}$$
