# MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
# EXAMENES RESUELTOS

# EVAU SEPTIEMBRE 2020
# - Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Septiembre 2020 (Extraordinario)

**Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)**

I) *(7 puntos) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss.*

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

II) *(3 puntos) Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

*, calcule AB e indique qué relación hay entre A y B.*

*(Navarra - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020)*



**Solución.**

I) Escribimos el sistema en forma matricial: $A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Comp. Indet. ($\infty$ sol.)

Resolvemos el sistema por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - \lambda + 2 + 3\lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3\lambda - z = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \qquad\qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 3\lambda \end{array}}$$

II) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \implies A = B^{-1}$

**Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)**

*Dada la función* $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{x}$

I) *(3 puntos) Calcule los máximos y mínimos.*

II) *(4 puntos) Calcule* $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$

III) *(3 puntos) Calcule la derivada de la función* $g(x)$, *siendo*

$$g(x) = f(x) + \ln{(5x-3)}^2 + x\cdot e^{3x}$$

*(Navarra - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020)*

**Solución.**

I) $$f'(x) = \frac{(2x+3)\cdot x - (x^2+3x+4)}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \implies x^2-4=0 \Rightarrow x = \{-2, 2\}$$

| | $(-\infty,-2)$ | $(-2,0)$ | $(0,2)$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | + | - | - | + |
| $f(x)$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y *decreciente* en $(-2,0)\cup(0,2)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(2,7)$ y un *máximo relativo* en $(-2,-1)$.

II) $$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2+3x+4}{x}\,dx = \int_1^2\left(x+3+\frac{4}{x}\right)dx = \left.\frac{x^2}{2}+3x+4\cdot\ln|x|\right]_1^2$$

$$= (2+6+4\cdot\ln 2) - \left(\frac{1}{2}+3+4\cdot\cancelto{0}{\ln 1}\right) = \frac{9}{2}+4\cdot\ln 2 = \frac{9}{2}+\ln 16$$

III) $$g(x) = f(x) + \ln{(5x-3)}^2 + x\cdot e^{3x} = f(x) + 2\cdot\ln{(5x-3)} + x\cdot e^{3x}$$

$$g'(x) = f'(x) + 2\cdot\frac{5}{5x-3} + e^{3x} + x\cdot e^{3x}\cdot 3 = \frac{x^2-4}{x^2} + \frac{10}{5x-3} + e^{3x}\cdot(3x+1)$$

$$= 1 - \frac{4}{x^2} + \frac{10}{5x-3} + e^{3x}\cdot(3x+1)$$

**Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)**

*El peso (en toneladas) de los contenedores que transporta una empresa de servicios de transporte marítimo puede aproximaarse a una distribución normal con desviación de* 3 *toneladas.*

I) *(*5 *puntos) Se realizó un estudio tomando una muestra aleatoria simple de contenedores y se calculó un intervalo de confianza al* 97 % *para la media poblacional, con un error máximo de* 0.651*. Calcule el tamaño de la muestra que se tomó en ese estudio.*

II) *(*5 *puntos) Se decide realizar otro estudio y se selecciona una muestra de contenedores, obteniéndose los siguientes pesos (en toneladas):*

20.25 17.5 21.8 15.7 14.6 17.2 23.1 11.7 18.3

*Construya un intervalo de confianza para el peso medio de los contenedores, con un nivel de confianza del* 93 %*.*

*(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)*

*(Navarra - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Peso de los contenedores (toneladas)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

I) $n = ?$ & $E = 0.651$ & $1-\alpha = 0.97$

$$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies {}^{\alpha}\!/_2 = 0.015 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.651 \implies n = \left(2.17 \cdot \frac{3}{0.651}\right)^2 \implies \boxed{n = 100}$$

II) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=9} \overline{x} = \frac{20.25+17.5+21.8+15.7+14.6+17.2+23.1+11.7+18.3}{9} = 17.79$

$$1-\alpha = 0.93 \implies \alpha = 0.07 \implies {}^{\alpha}\!/_2 = 0.035 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_2 = 0.965 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.81$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{3}{\sqrt{9}} = 1.81$$

$$I.C._{93\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{93\,\%}(\mu) = (15.98; 19.60)}$$

**Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)**

*Una empresa diseña y vende dos tipos de telas (T1 y T2) con un precio de venta de 60 euros/m$^2$ y 100 euros/m$^2$, respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 $m^2$ de telas. Para elaborar un $m^2$ de tela T1 se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un $m^2$ de tela T2 se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad semanal de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos $m^2$ de cada tipo de tela tiene que vender la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un $m^2$ de cada tipo de tela es 15 y 10 euros, respectivamente?*

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de $m^2$ de tela T1 que de tela T2.*

*(Navarra - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020)*

**Solución.**

| | Tela T1 | Tela T2 | Disponibilidad |
|---|---|---|---|
| Tiempo de máquina ($h/m^2$) | 2 | 4 | $\leq 80$ |
| Carretes de hilo ($ud/m^2$) | 6 | 3 | $\leq 150$ |
| Precio venta (€/$m^2$) | 60 | 100 | |
| Precio coste (€/$m^2$) | 15 | 10 | |

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad de tela tipo T1 } (m^2)\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de tela tipo T2 } (m^2)\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

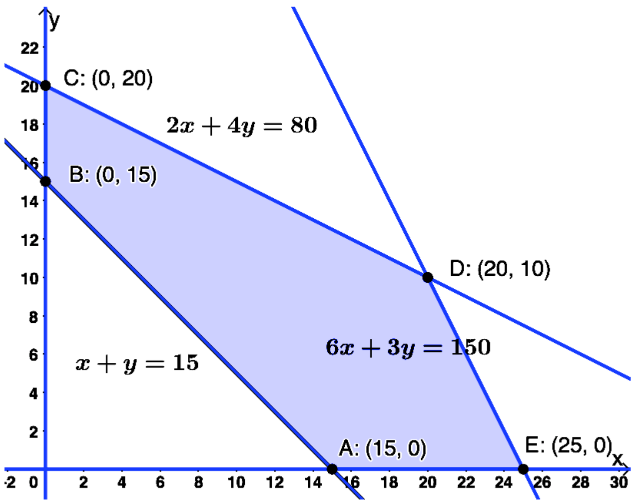
$$\begin{cases} ① \ x + y \geq 15 & \rightarrow (0,15) \quad \& \quad (15,0) \\ ② \ 2x + 4y \leq 80 & \rightarrow (0,20) \quad \& \quad (40,0) \\ ③ \ 6x + 3y \leq 150 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (25,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$B(x,y) = V(x) - C(x) = 60x + 100y - (15x + 10y) = 45x + 90y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $B(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 15 | 0 | 675 |
| B | 0 | 15 | 1350 |
| C | 0 | 20 | 1800 |
| D | 20 | 10 | 1800 |
| E | 25 | 0 | 1125 |




El *beneficio máximo* es de 1800€ y se obtiene en cualquier punto del segmento que une los puntos C:(0,20) y $D:(20,10)$. Se pueden obtener las infinitas soluciones dando valores a $x$ comprendidos entre $[0,20]$ y despejando la $y$ en la ecuación $2x+4y=80$.

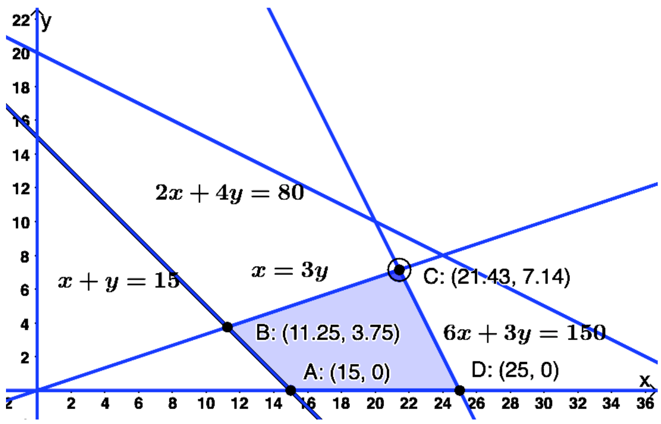
III) Si queremos elaborar al menos el triple de tela T1 que de tela T2 hemos de añadir la restricción: $x \geq 3y$. Rehacemos la región factible y recalculamos el beneficio en los vértices de la misma:

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x+y \geq 15 & \rightarrow (0,15) \quad \& \quad (15,0) \\ ② \; 2x+4y \leq 80 & \rightarrow (0,20) \quad \& \quad (40,0) \\ ③ \; 6x+3y \leq 150 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (25,0) \\ ④ \; x \geq 3y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (60,20) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $B(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 15 | 0 | 675 |
| B | 11.25 | 3.75 | 843,85 |
| C | 21.43 | 7.14 | 1606.95 |
| D | 25 | 0 | 1125 |




El *beneficio máximo* es aproximadamente 1607€ y se obtiene vendiendo 21.43 $m^2$ de tela T1 y 7.14 $m^2$ de tela T2.

**Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)**

*Considere la siguiente función definida a trozos:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 6x + 5 & , \text{si } 1 < x < 4 \\ 2x - 11 & , \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

I) *(4 puntos) Calcule las derivadas laterales de $f(x)$ en $x = 4$, utilizando la definición de derivada.*

II) *(2 puntos) ¿La función $f(x)$ es derivable en $x = 4$? ¿Es continua en $x = 4$? Justifique la respuesta.*

III) *(4 puntos) Calcule la siguiente integral: $\int \sqrt{6x-1}\, dx$*

*(Navarra - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020)*

**Solución.**

I) $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

- $f'(4^-) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_2(4+h) - f_2(4)}{h} \overset{\odot}{=} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2h - 3 - (-3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2h}{h}$

  $= \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{h} \cdot (h+2)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{x \to 0} (h+2) = 2$

- $f'(4^+) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_3(4+h) - f_3(4)}{h} \overset{\circledast}{=} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h - 3 - (-3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h}{h} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

  $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim\limits_{x \to 0} 2 = 2$

$\odot$ $f_2(4+h) = (4+h)^2 - 6 \cdot (4+h) + 5 = 16 + h^2 + 8h - 24 - 6h + 5 = h^2 + 2h - 3$

$f_2(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 = -3$

$\circledast$ $f_3(4+h) = 2 \cdot (4+h) - 11 = 8 + 2h - 11 = 2h - 3$

$f_3(4) = 2 \cdot 4 - 11 = -3$

II)
- `Continuidad en` $x = 4$:
  - $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 6x + 5) = -3$
  - $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (2x - 11) = -3$
  - $f(4) = 2 \cdot 4 - 11 = -3$

  Como $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$, la función es continua en $x = 4$
- `Derivabilidad en` $x = 4$:

  Como $f'(4^-) = f'(4^+)$, la función es derivable en $x = 4$.

III) $\int \sqrt{6x-1}\, dx = \dfrac{1}{6} \int \underbrace{6}_{u'} \cdot \underbrace{(6x-1)^{1/2}}_{u^{1/2}}\, dx = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot (6x-1)^{3/2} + C = \dfrac{1}{9} \cdot \sqrt{(6x-1)^3} + C$

**Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)**

*En un centro de bachillerato aprobaron la prueba de acceso a la universidad 112 estudiantes de los 140 que se presentaron. En un segundo centro aprobaron la prueba el 60 % de los 110 estudiantes presentados.*

*a) (3 puntos) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que haya aprobado.*

*b) (4 puntos) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que proceda del segundo centro, sabiendo que el estudiante ha suspendido.*

*c) (3 puntos) Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que pertenezcan al mismo centro.*

*(Navarra - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$C_i \equiv \text{“El estudiante es del centro de bachillerato } i\text{”}$$
$$A \equiv \text{“El estudiante ha aprobado la EVAU”}$$

| | $C_1$ | $C_2$ | **Total** |
|---|---|---|---|
| $A$ | 112 | $0.6 \cdot 110 = 66$ | 178 |
| $\overline{A}$ | 28 | 44 | 72 |
| **Total** | 140 | 110 | 250 |



I) $P(A) = \dfrac{178}{250} = 0.712$

II) $P(C_2 \mid \overline{A}) = \dfrac{44}{72} = 0.6111$

III) $P(\text{Los 3 del mismo centro}) = P\Big((C_1 \cap C_1 \cap C_1) \cup (C_2 \cap C_2 \cap C_2)\Big)$

$$= P(C_1 \cap C_1 \cap C_1) + P(C_2 \cap C_2 \cap C_2) = \frac{140}{250} \cdot \frac{139}{249} \cdot \frac{138}{248} + \frac{110}{250} \cdot \frac{109}{249} \cdot \frac{108}{248} = 0.2578$$