MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2020
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022 (Ordinario)

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

I) *(3 puntos) Calcule* $A \cdot B^\top$ *y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa.*

II) *(7 puntos) Determine las matrices* X *e* Y *que verifican el sistema:* $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}$

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

I) $A \cdot B^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}$

$$\left| A \cdot B^\top \right| = -59 \neq 0 \implies \exists \left(A \cdot B^\top \right)^{-1}$$

II) $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}$

$$\begin{array}{lcr} 2X - 3Y = A & \xrightarrow{\times 3} & \cancel{6X} - 9Y = 3A \\ 3X - 2Y = B & \xrightarrow{\times(-2)} & \cancel{-6X} + 4Y = -2B \\ \hline & & -5Y = 3A - 2B \end{array} \implies \boxed{Y = \frac{1}{5} \cdot (2B - 3A)}$$

$$3X - 2Y = B \implies 3X - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot (2B - 3A) = B \implies \boxed{X = \frac{1}{5} \cdot (3B - 2A)}$$

$$X = \frac{1}{5} \cdot (3B - 2A) = \frac{1}{5} \cdot \left[3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{5} \cdot (2B - 3A) = \frac{1}{5} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

Un joven estudiante ganó 20000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20 % y no más del 50 % del premio. Un asesor le aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz, y una rentabilidad del 7 %, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4 %. El estudiante decide invertir no más de 8000 euros en la cartera C1 y al menos 3000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2500 euros en la cartera C1.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Importe invertido en la cartera C1 (miles de €)"
  $y \equiv$ "Importe invertido en la cartera C2 (miles de €)"

- `Restricciones`: Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

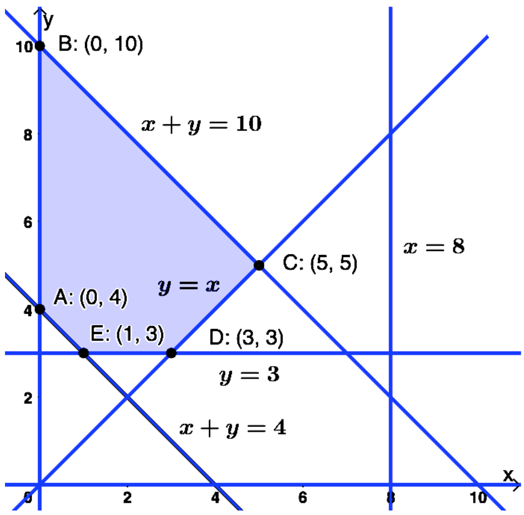
$$\begin{cases} ① \ x+y \geq 0.2\cdot 20 \\ ② \ x+y \leq 0.5\cdot 20 \\ ③ \ x \leq 8 \\ ④ \ y \geq 3 \\ ⑤ \ y \geq x \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x+y \geq 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (4,0) \\ ② \ x+y \leq 10 & \to (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ③ \ x \leq 8 & \to (8,0) \\ ④ \ y \geq 3 & \to (0,3) \\ ⑤ \ y \geq x & \to (0,0) \quad \& \quad (3,3) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0.07x + 0.04y$ (en miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	4	0.16
B	0	10	0.4
C	5	5	0.55
D	3	3	0.33
E	1	3	0.19



La máxima rentabilidad es de 550€ y se consigue invirtiendo 5000€ en cada cartera.

- **Restricciones:** Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

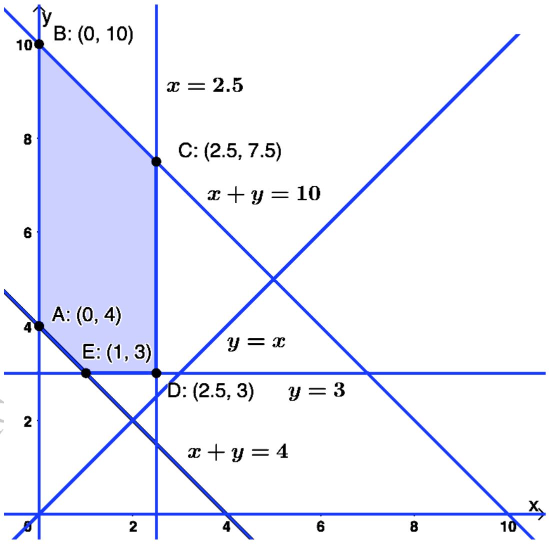
$$\begin{cases} ① \ x + y \geq 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (4,0) \\ ② \ x + y \leq 10 & \to (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ③ \ x \leq 2.5 & \to (2.5,0) \\ ④ \ y \geq 3 & \to (0,3) \\ ⑤ \ y \geq x & \to (0,0) \quad \& \quad (3,3) \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

- **Función objetivo** $\quad f(x,y) = 0.07x + 0.04y$ (en miles de €)

- **Región factible** Representamos la región y calculamos los vértices.

- **Optimización de F.O.** Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	4	0.16
B	0	10	0.4
C	2.5	7.5	0.475
D	2.5	3	0.295
E	1	3	0.19



La máxima rentabilidad es de 475€ y se consigue invirtiendo 2500€ en la cartera C1 y 7500€ en la cartera C2.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

I) *(3 puntos) Estudie la continuidadd de* $f(x)$*, clasificando los puntos de discontinuidad.*

II) *(4 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función* $f(x)$ *en el punto* $x = 1$.

III) *(3 puntos) Calcule* $\int f(x)\,dx$.

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

I) $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2 \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x}{x^2-4} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \pm\infty \quad \& \quad \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x}{x^2-4} = \left[\frac{2}{0}\right] = \pm\infty$$

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$, en donde hay sendas discontinuidad inevitable de salto infinito.

II)

- $x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = -\dfrac{1}{3} \implies (x_0, y_0) = (1, -1/3)$
- $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4 - x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$
- $m_r = f'(x_0) = f'(1) = -\dfrac{5}{9}$
- $r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{5}{9}\cdot(x-1) \implies \boxed{r \equiv y = -\dfrac{5}{9}x + \dfrac{2}{9}}$

III) $$\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \int \underbrace{\frac{2x}{x^2-4}}_{u'/u}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln\left|x^2-4\right| + C$$

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Sea la función $f(x) = x \cdot (x-3)^2$

I) *(1 punto) Calcule los puntos de corte con los ejes.*

II) *(3 puntos) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

III) *(2 puntos) Dibuje el recinto limitado por la función* $f(x)$ *y el eje* OX.

IV) *(4 puntos) Calcule el área de dicho recinto.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

I) `Corte con los ejes`

Eje $OX \implies y = 0 \implies x \cdot (x-3)^2 = 0 \implies x = \{0, 3\} \implies (0,0)$ & $(3,0)$

Eje $OY \implies x = 0 \implies y = 0 \implies (0,0)$

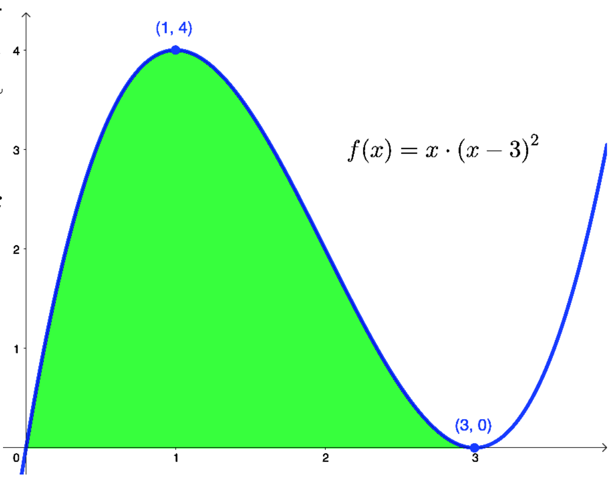
II) $f'(x) = (x-3)^2 + x \cdot 2 \cdot (x-3) = (x-3) \cdot (x - 3 + 2x)$

$= (x-3) \cdot (3x-3) = 3 \cdot (x-3) \cdot (x-1) = 0 \implies x = \{1, 3\}$

	$(-\infty, 1)$	$(1,3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y *decreciente* en $(1,3)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(3,0)$ y un *máximo relativo* en $(1,4)$.

III) Representamos los puntos de corte obtenidos, así como los puntos críticos. Teniendo en cuenta la monotonía de la función, su gráfica es la adjunta.



IV) $Area = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 x \cdot (x-3)^2\,dx$

$$= \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx$$

$$= \left.\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \left(\frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2}\right) - 0 = \frac{27}{4}\ u^2$$

Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (Trans y Logis). El año pasado, la empresa realizó 1500 *ventas y encargó a* Trans *el* 60 % *del reparto y a* Logis *el* 40 %. *El* 20 % *de los productos distribuidos por* Trans *fueron tipo A, el* 50 % *fueron tipo B y el* 30 % *tipo C. Para la empresa* Logis, *estos porcentajes fueron* 40 %, 35 % *y* 25 %, *respectivamente.*

i) *(3 puntos) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por* Trans.

ii) *(4 puntos) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto tipo C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por* Logis.

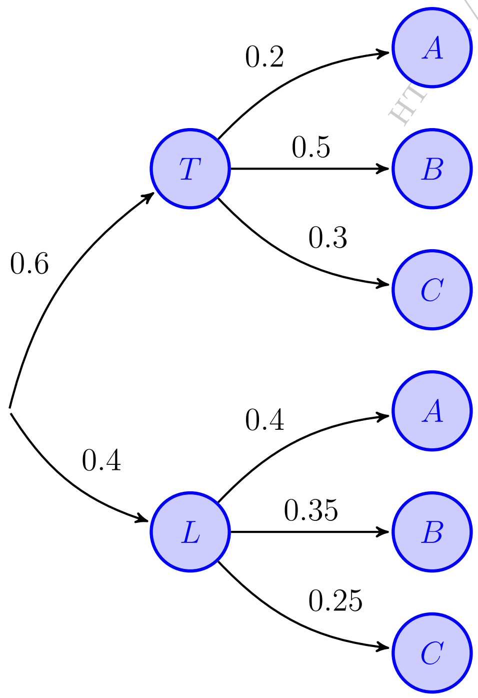
iii) *(3 puntos) Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realzadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por* Trans.

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

Sean los sucesos:

$$T \equiv \text{“El producto es distribuido por } \textit{Trans}\text{”}$$
$$L \equiv \text{“El producto es distribuido por } \textit{Logis}\text{”}$$
$$A \equiv \text{“El producto vendido es el } A\text{”}$$
$$B \equiv \text{“El producto vendido es el } B\text{”}$$
$$C \equiv \text{“El producto vendido es el } C\text{”}$$



i) $P(T \cap B) = P(T) \cdot P(B \mid T) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3$

ii)
$$\begin{aligned} P(C) &= P\big((T \cap C) \cup (L \cap C)\big) \\ &= P(T \cap C) + P(L \cap C) \\ &= P(T) \cdot P(C \mid T) + P(L) \cdot P(C \mid L) \\ &= 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.25 = 0.28 \end{aligned}$$

$$P(L \mid C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{P(L) \cdot P(C \mid L)}{P(C)}$$
$$= \frac{0.4 \cdot 0.25}{0.28} = 0.35712$$

iii) Nº ventas por T $= 0.6 \cdot 1500 = 900$

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1) \cdot P(T_2 \mid T_1)$$
$$= \frac{900}{1500} \cdot \frac{899}{1499} = 0.3598$$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

El consumo energético mensual (en kWh) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400*. Se elige una muestra de* 64 *hogares, obteniéndose una suma total del consumo de* 17280 *kWh.*

I) *(5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al* 92 % *para el consumo energético medio en hogares.*

II) *(5 puntos) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo se reduzca a la mitad.*

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo mensual (kWh)”} \xrightarrow{\sigma^2=400} X : \mathcal{N}(\mu, 20)$$

I) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = \dfrac{17280}{64} = 270$

$1-\alpha = 0.92 \implies \alpha = 0.08 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.04 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.96 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.75$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \dfrac{20}{\sqrt{64}} = 4.375$

$I.C._{92\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{92\,\%}(\mu) = (265.625; 274.375)}$

II) $n = ? \qquad \& \qquad E' = \dfrac{E}{2} = \dfrac{4.375}{2} = 2.1875 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.92$

$E' = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \dfrac{20}{\sqrt{n}} = 2.1875 \implies n = \left(1.75 \cdot \dfrac{20}{2.1875}\right)^2 \implies \boxed{n = 256}$