MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2021

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2021 (Ordinario)

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ & $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, *responda a las siguientes cuestiones:*

I) *(3 puntos) Calcule* A^{-1} *y* B^{-1}.

II) *(3 puntos) Resuelva la ecuación matricial* $C - A = 2X - 6I$.

III) *(4 puntos) Resuelva la ecuación matricial* $AXB = C$.

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

I) $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $B^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

II) $C - A = 2X - 6I \implies 2X = C - A + 6I \implies \boxed{X = \frac{1}{2} \cdot (C - A + 6I)}$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 11/2 \end{pmatrix}}$$

III) $AXB = C \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$

$$X = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 28 & -14 \\ 36 & -20 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

Un empresario quiere dedicar 50 horas laborables a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de cursos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1 %, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2 %. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas se debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

- Incógnitas $x \equiv$ "Duracióon del curso F1 (horas)"
  $y \equiv$ "Duracióon del curso F2 (horas)"

- Restricciones: Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

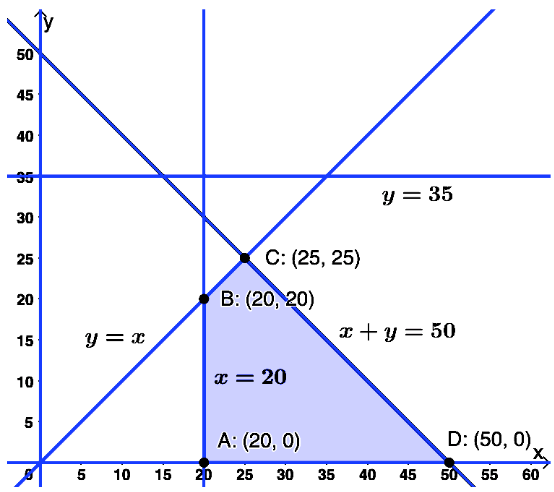
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 50 & \to (0,50) \quad \& \quad (50,0) \\ ② \; x \geq 20 & \to (20,0) \\ ③ \; y \leq 35 & \to (0,35) \\ ④ \; x \geq y & \to (0,0) \quad \& \quad (30,30) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- Función objetivo $f(x,y) = 0.01x + 0.02y$

- Región factible Representamos la región y calculamos los vértices.

- Optimización de F.O. Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	0	0.2
B	20	20	0.6
C	25	25	0.75
D	50	0	0.5



El aumento de productividad tendrá un *máximo* de 75 % dedicando 25 horas a cada curso.

III) Modificamos la restricción ③ y recalculamos la región factible

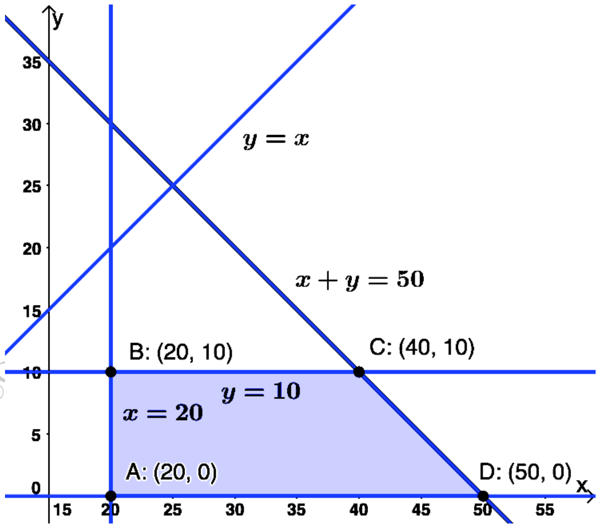
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x+y \leq 50 & \rightarrow (0,50) \quad \& \quad (50,0) \\ ② \ x \geq 20 & \rightarrow (20,0) \\ ③ \ y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \\ ④ \ x \geq y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (30,30) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0.01x + 0.02y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	0	0.2
B	20	10	0.4
C	40	10	0.60
D	50	0	0.5

El aumento de productividad tendrá un *máximo* de 60 % dedicando 40 horas al curso F1 y 10 al curso F2.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{2x-2}$ & $g(x) = 2x^2 + ax + 1.$

I) *(3 puntos) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad.*

II) *(3 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que $g(x)$ tenga un mínimo en $x = {}^1\!/_2$.*

III) *(4 puntos) Calcule $g'(1)$ aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro $a = -1$.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

I) $2x-2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ y como $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x+3}{2x-2} = \left[\dfrac{8}{0}\right] = \pm\infty$

, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, donde hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.

II) $g(x) = 2x^2 + ax + 1$ & $g'(x) = 4x + a$ & $g''(x) = 4$

Min en $x = {}^1\!/_2 \implies g'({}^1\!/_2) = 0 \implies 4\cdot\dfrac{1}{2} + a = 0 \implies \boxed{a=-2}$

$g''(x) = 4 \implies g''({}^1\!/_2) = 4 > 0 \overset{(\cup)}{\implies}$ Mínimo en $x = {}^1\!/_2$

III) Para $a=-1 \implies g(x) = 2x^2 - x + 1$

$$g'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} \overset{\odot}{=} \frac{(2h^2+3h+\cancel{2})-\cancel{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(2h+3)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(2h+3) = 3$$

$\odot$ $g(1+h) = 2\cdot(1+h)^2 - (1+h) + 1 = 2\cdot(1+2h+h^2) - 1 - h + 1 = 2h^2+3h+2$

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

I) *(5 puntos) Calcule las asíntotas de la función* $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{x+1}$.

II) *(5 puntos) Calcule la primitiva de la función* $f(x)=(2x+1)^3$, *sabiendo que* $F(0)=9/8$.

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

I)

- `Dominio:` $x+1=0 \implies x=-1 \implies \mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$
- `A. Vertical:` $\exists A.V.$ en $x=-1$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5}{x+1}=\left[\frac{7}{0}\right]=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x)=\frac{7}{0^-}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{7}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

- `Horizontal:` $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\pm\infty \implies \nexists A.H.$
- `A. Oblicua:` $\exists A.O.\quad y=2x-2$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5}{x^2+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{2}{1}=2$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+5}{x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{2x^2}+5-\cancel{2x^2}-2x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-2x}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{-2}{1}=-2$$

II) $$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(2x+1)^3\,dx=\frac{1}{2}\int\underbrace{2}_{u'}\cdot\underbrace{(2x+1)^3}_{u^3}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot(2x+1)^4+C$$

$$=\frac{1}{8}\cdot(2x+1)^4+C \overset{\circledast}{\Longrightarrow} \boxed{F(x)=\frac{1}{8}\cdot(2x+1)^4+1}$$

$$\circledast\ F(0)=\frac{9}{8}\implies\frac{1}{8}+C=\frac{9}{8}\implies C=1$$

Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75 % de las visitas buscan alojamiento, el 55 % de las visitas buscan vuelo y el 40 % de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:

+) *(3 puntos) La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento.*

+) *(4 puntos) La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo.*

+) *(3 puntos) La probabilidad de que no busque ni vuelo ni alojamiento.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La visita busca alojamiento”}$$
$$V \equiv \text{“La visita busca vuelo”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = 0.75 \quad \& \quad P(V) = 0.55 \quad \& \quad P(A \cap V) = 0.4$$

I) $P(V \cup A) = P(V) + P(A) - P(V \cap A) = 0.55 + 0.75 - 0.4 = 0.9$

II) $P(A \mid \overline{V}) = \dfrac{P(A \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap V)}{1 - P(V)} = \dfrac{0.75 - 0.4}{1 - 0.55} = \dfrac{0.35}{0.45} = \dfrac{7}{9} = 0.7778$

III) $P(\overline{V} \cap \overline{A}) = P(\overline{V \cup A}) = 1 - P(V \cup A) = 1 - 0.9 = 0.1$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos:

49.8 34.4 42.1 55.7 54.9 53 54.6 53.3 68.9 42.4

I) *(5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 93 % para el gasto medio.*

II) *(5 puntos) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad.*

(Escriba lass fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

(Navarra - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto por cliente en un supermercado (€)”} \xrightarrow{\sigma^2=64} X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 8) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{49.8+34.4+42.1+55.7+54.9+53+54.6+53.3+68.9+42.4}{10} = 50.91$

$1-\alpha = 0.93 \implies \alpha = 0.07 \implies \alpha/2 = 0.035 \implies 1-\alpha/2 = 0.965 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.81$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \dfrac{8}{\sqrt{10}} = 4.58$

$I.C._{93\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{93\,\%}(\mu) = (46.33; 55.49)}$

b) $n = ?$ & $E' = \dfrac{E}{2} = \dfrac{4.58}{2} = 2.29$ & $1 - \alpha = 0.93$

$E' = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \dfrac{8}{\sqrt{n}} = 2.29 \implies n = \left(1.81 \cdot \dfrac{8}{2.29}\right)^2 = 39.98 \implies \boxed{n = 40}$