MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2021
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2021
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

Calcularemos los precios de cada una de las acciones que llamaremos a, b y c.

$$b = 1 \qquad \& \qquad a = 3b \implies a = 3 \qquad \& \qquad a = \frac{c}{2} \implies c = 6$$

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Nº de acciones de la empresa A"}$$
$$y \equiv \text{"Nº de acciones de la empresa B"}$$
$$z \equiv \text{"Nº de acciones de la empresa C"}$$

Escribimos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ z = \frac{y}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 3 & 1 & 6 & 1560 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 0 & -2 & 3 & -60 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 0 & -2 & 3 & -60 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 120 + 60 = 540 \\ \Rightarrow -2y + 3 \cdot 60 = -60 \\ \Rightarrow -z = -60 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 360 \\ y = 120 \\ z = 60 \end{array}}$$

Para obtener un reparto equitativo de las acciones daremos un tercio a cada hermano, es decir: 120 acciones de A, 40 acciones de B y 20 de C.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = 2 + x - x^2 \qquad \& \qquad g(x) = 2x^2 - 4x$$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

Sea la función:

$$h(x) = f(x) - g(x) = 2 + x - x^2 - (2x^2 - 4x)$$
$$= -3x^2 + 5x + 2$$

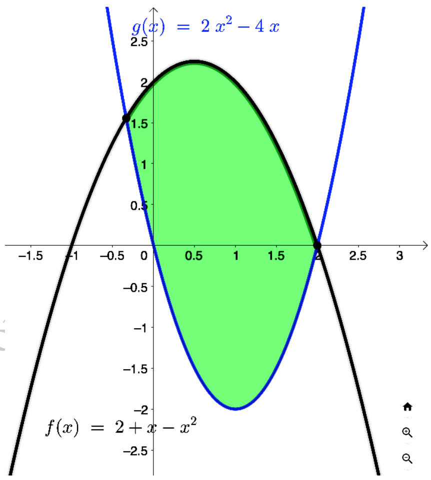
$$h(x) = 0 \implies -3x^2 + 5x + 2 = 0 \implies x = \{-1/3, 2\}$$

que define un único recinto de integración $A = (-1/3, 2)$

$$A = \int_{-1/3}^{2} h(x)\,dx = \int_{-1/3}^{2} \left(-3x^2 + 5x + 2\right) dx$$

$$= -x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x\Big]_{-1/3}^{2} = \frac{343}{54}$$

$$Area = |A| = \frac{343}{54} = 6.35\,u^2$$



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ *y el plano* $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$.

Se pide:

a) *(0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman* r *y* π.

b) *(1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta* r *y el plano* π *con respecto al plano* $z - y = 0$.

c) *(0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta* r *sobre el plano* π

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $$r \equiv \begin{cases} R(-1, 0, -1) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

El ángulo que forman la recta r y el plano π es el complementario del que forman los vectores $\vec{d_r} = (-2, 1-, 1)$ y $\vec{n_\pi} = (2, 1, -1)$

$$\cos(90 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha = \frac{\left|\vec{d_r} \cdot \vec{n}\pi\right|}{\left|\vec{d_r}\right| \cdot |\vec{n_\pi}|} = \frac{|-4 + 1 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{3} \implies \alpha = 19.47^\circ$$

b) Hallamos la intersección $P = r \cap \pi$

$$2 \cdot (-1 - 2\lambda) + \lambda - (-1 - \lambda) + 3 = 0 \xRightarrow{\lambda=1} P(-3, 1, -2)$$

Para hallar el simétrico de P respecto del plano $\pi_1 = z - y = 0$, hallamos la recta $s \perp \pi_1 \mid P \in s$

$$s \equiv \begin{cases} P(-3, 1, -2) \\ \vec{d_s} = \vec{n}_{\pi_1} = (0, -1, 1) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

El punto de intersección $O = s \cap \pi_1$ será:

$$-2 + \lambda - (1 - \lambda) = 0 \xRightarrow{\lambda=3/2} O(-3, -1/2, -1/2)$$

Y el simétrico P' del punto P respecto del plano π_1 será tal que:

$$O = M_{\overline{PP'}} = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow P' = 2O - P = 2 \cdot \left(-3, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) - (-3, 1, -2) \Rightarrow \boxed{P'(-3, -2, 1)}$$

b) La proyección de la recta r sobre el plano π será la recta t intersección del plano π y del plano π' perpendicular a π que contiene a la recta r.

$$\pi' \equiv \begin{cases} R(-1, 0, -1) \\ \vec{u} = \vec{d_r} = (-2, 1, -1) \\ \vec{v} = \vec{n}_\pi = (2, 1, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi' \equiv y + z + 1 = 0$$

Y la recta $t = \pi \cap \pi' \implies t \equiv \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8-c, 8.8+c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de os individuos de esta especie?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

$X \equiv$ "Tiempo de vida de especie animal (meses)" & $X : \mathcal{N}(8.8, 3)$

a)
$$P(X>10) = P\Big(Z > \frac{10-8.8}{3}\Big) = P(Z>0.4) = 1 - P(Z<0.4)$$
$$= 1 - 0.6554 = 0.3446 = 34.46\,\%$$
$$P(7<X<10) = P\Big(\frac{7-8.8}{3} < Z < \frac{10-8.8}{3}\Big) = P(-0.6<Z<0.4)$$
$$= P(Z<0.4) - P(Z<-0.6) = P(Z<0.4) - P(Z>0.6)$$
$$= P(Z<0.4) - \Big[P(Z<0.6)\Big] = 0.6554 - (1 - 0.7257)$$
$$= 0.3811 = 38.11\,\%$$

b) $Y \equiv$ "Nº especímenes que no superan los 10 meses"

$$Y : \mathcal{B}(n,p) \implies \left\{\begin{array}{l} n = 4 \\ p = 1 - 0.3446 = 0.6554 \\ q = 0.3446 \end{array}\right\} \implies Y : \mathcal{B}(4, 0.6554)$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0.6554^0 \cdot 0.3445^4 = 0.9859$$

c) $P(8.8-c<X<8.8+c) = 0.98$

$$P(8.8-c<X<8.8+c) = P\Big(\frac{8.8-c-8.8}{3} < Z < \frac{8.8+c-8.8}{3}\Big)$$
$$= P\Big(\frac{-c}{3} < Z < \frac{c}{3}\Big) = P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big) - P\Big(Z<-\frac{c}{3}\Big)$$
$$= P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big) - P\Big(Z>\frac{c}{3}\Big) = P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big) - \Big[1 - P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big)\Big]$$
$$= 2\cdot P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big) - 1 = 0.98 \implies P\Big(Z<\frac{c}{3}\Big) = 0.99$$
$$\xRightarrow{Tabla} \frac{c}{3} = 2.325 \implies \boxed{c = 6.975}$$

Junio 2021
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} ax-2y+(a-1)z=4 \\ -2x+3y-6z=2 \\ -ax+y-6z=6 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a=1$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 3a^2 - 29a + 26 = 0 \implies a = \{1, {}^{26}\!/\!_3\}$$

- Si $a \neq \{1, {}^{26}\!/\!_3\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = {}^{26}\!/\!_3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} {}^{26}\!/\!_3 & -2 & {}^{23}\!/\!_3 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -{}^{26}\!/\!_3 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} -2 & 23/3 & 4 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{368}{3} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$$

$\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 2\cdot(-10-6\lambda) = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 6\lambda = 10 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -16 - 12\lambda \\ y = -10 - 6\lambda \quad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ x \cdot e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{1} f(x)\,dx$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

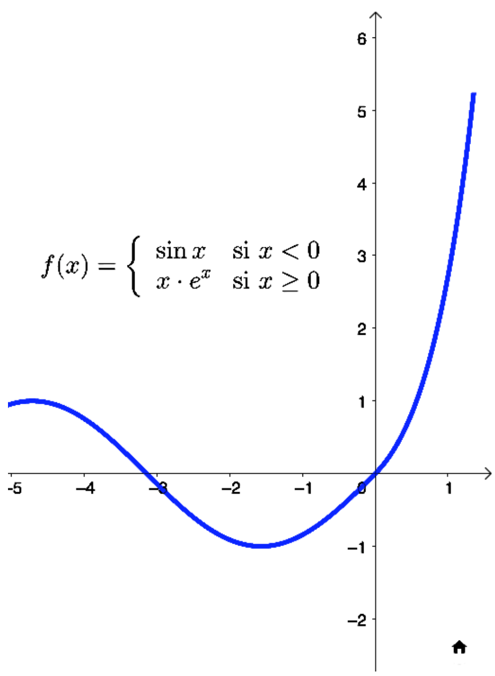
a)
- `Continuidad en` $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sen} x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot e^x = 0$
  - $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$

  Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.
- `Derivabilidad en` $x = 0$

  $$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ (1+x)\cdot e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  - $f'(0^-) = 1$
  - $f'(0^+) = 1$

  Como $f'(0^-) = f'(0^+)$ la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$



b) Hallamos los puntos singulares en cada una de las ramas de la función restringido al intervalo $(-\pi, 2)$

$$\begin{array}{l} f_1'(x) = \cos x = 0 \implies x = -\pi/2 \\ f_2'(x) = (1+x)\cdot e^x = 0 \implies \cancel{x=-1} < 0 \end{array}$$

Lo que define los intervalos $(-\pi, -\pi/2)$ $(-\pi/2, 0)$ y $(0, 2)$

	$(-\pi, -\pi/2)$	$(-\pi/2, 0)$	$(0, 2)$
Signo $f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$

Por lo tanto $f(x)$ es *creciente* en $(-\pi/2, 2)$ y *decreciente* en $(-\pi, -\pi/2)$ y tiene un *mínimo relativo* en $(-\pi/2, -1)$.

Para demostrar que $\exists x_0 \in [0,1] \mid f(x_0) = 2$ vamos a crear la función $g(x) = 2$ y la diferencia de ambas $h(x) = f(x) - g(x) = x \cdot e^x - 2$ y a usar el *Teorema de Bolzano.*

$$\left.\begin{array}{l} h(x) \text{ es continua en } [0,1] \\ h(0) = -2 < 0 \\ h(1) = e - 2 > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\textit{Bolzano}]{\textit{Teorema}} \begin{cases} \exists x_0 \in (0,1) \mid h(x_0) = 0 \\ \implies f(x_0) - g(x_0) = 0 \\ \implies f(x_0) - 2 = 0 \implies f(x_0) = 2 \text{ q.e.d.} \end{cases}$$

c) $$\int_{-\pi/2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{sen} x\,dx + \int_0^1 f_2(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{0} f_1(x)\,dx + \int_0^1 x\cdot e^x\,dx$$
$$\overset{\circledast}{=} -\cos x\Big]_{-\pi/2}^{0} + (x-1)\cdot e^x\Big]_0^1 = -1 + 1 = 0$$

$$\circledast \int x\cdot e^x\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x\,dx & \Rightarrow v = e^x \end{array}\right\} = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x = (x-1)\cdot e^x$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ *y* $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 *tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.*

b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ *y es perpendicular al plano* π_2.

c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 *con los ejes* x *e* y.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

a) Llamamos $\pi \equiv x + y + D = 0$ al plano paralelo a π_1 pedido. Obligamos a que la distancia a $O(0, 0, 0)$ sea igual a 2.

$$d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 + D|}{\sqrt{2}} = 2 \implies |D| = 2\sqrt{2} \implies D = \pm 2\sqrt{2}$$

Y los planos que cumplen las condiciones del enunciado serán:

$$\pi_3 = x + y + 2\sqrt{2} = 0 \qquad \& \qquad \pi_4 = x + y - 2\sqrt{2} = 0$$

b) $r \equiv \begin{cases} R(0, 2, 0) \\ \vec{d_r} = \vec{n}_{\pi_2} = (1, 0, 1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\pi_1 \cap OX \xRightarrow[z=0]{y=0} x = 1 \implies P(1, 0, 0)$

$\pi_1 \cap OY \xRightarrow[z=0]{x=0} y = 1 \implies Q(0, 1, 0)$

$d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(-1, 1, 0)| = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}\, u$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de particulas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es de 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidadd de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que es un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$N \equiv \text{"en un día se supera el nievel perimitdo de } NO_2\text{"}$$
$$P \equiv \text{"en un día se supera el nivel permitido de partículas"}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(N) = 0.16 \qquad \& \qquad P(P \mid N) = 0.33 \qquad \& \qquad P(P \mid \overline{N}) = 0.08$$

a) $P(P \mid N) = \dfrac{P(P \cap N)}{P(N)} = \dfrac{P(P \cap N)}{0.16} = 0.33 \implies P(P \cap N) = 0.0528$

b) $P(P \mid \overline{N}) = \dfrac{P(P \cap \overline{N})}{P(\overline{N})} = \dfrac{P(P) - P(P \cap N)}{1 - P(N)} = \dfrac{P(P) - 0.0528}{1 - 0.16} = 0.08$

$\implies P(P) = 0.12$

$P(N \cup P) = P(N) + P(P) - P(N \cap P) = 0.16 + 0.12 - 0.0528 = 0.2272$

c) $\left.\begin{array}{l} P(N \cap P) = 0.0528 \\ P(N) \cdot P(P) = 0.16 \cdot 0.12 = 0.0192 \end{array}\right\} \implies \left| \begin{array}{c} P(P \cap N) \neq P(P) \cdot P(N) \\ N \text{ y } P \text{ no son independientes} \end{array}\right.$

d) $P(N \mid \overline{P}) = \dfrac{P(N \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{P(N) - P(N \cap \overline{P})}{1 - P(P)} = \dfrac{0.16 - 0.0528}{1 - 0.12} = 0.1218$