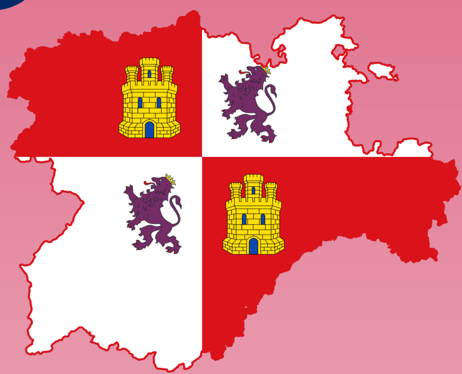
MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2022

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2022

Problema 1 (3 *puntos*)

Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Análisis)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de camiones para llevar agua potable”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de camiones para llevar medicinas”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} (1)\ x + y \leq 27 & \to (0,27) \quad \& \quad (27,0) \\ (2)\ x \geq 12 & \to (12,0) \\ (3)\ y \geq \dfrac{x}{2} & \to (0,0) \quad \& \quad (20,10) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

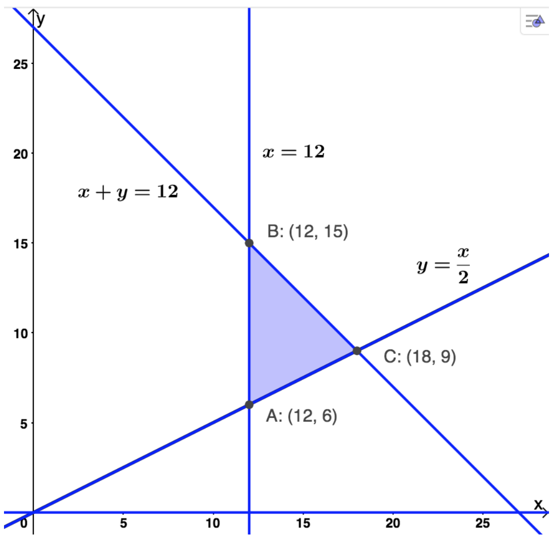
- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 9000x + 6000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	12	6	144000
B	12	15	198000
C	18	9	216000

El *coste mínimo* es de 144000 € y se consigue con un convoy formado por 12 camiones de agua y 6 de medicinas.



Problema 2 (3 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ ax + 2y - z = 3a \\ 2x + ay - z = 6 \end{cases}$$

a) *(1.5 puntos) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.*

b) *(1.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 2$.*

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ a & 2 & -1 & 3a \\ 2 & a & -1 & 6 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + 2a = a \cdot (2 - a) = 0 \implies a = \{0, 2\}$$

- Si $a \neq \{0, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + \lambda - 2 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 4 - \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{array}}$$

Problema 3 (3 *puntos*)

Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$$

donde t indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana.

a) *(1.5 puntos) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadana entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche? ¿Qué porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?*

b) *(1.5 puntos) Dibujar la gráfica de la función $S(t)$ para t comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.*

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

a) $S'(t) = -231 + 54t - 3t^2 = 0 \implies t = \{7, 11\}$

	$(6,7)$	$(7,11)$	$(11,12)$
Signo $S'(t)$	-	+	-
$S(t)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Estudiando la monotonía de la función $S(t)$, vemos que la máxima audiencia puede producirse en $t = 6$ o en $t = 11$, mientras que la mínima audiencia podría producirse en $t = 7$ o en $t = 12$, por lo que estudiamos esos puntos:

$$S(6) = 30 \quad \& \quad S(11) = 55 \quad \& \quad S(7) = 23 \quad \& \quad S(12) = 48$$

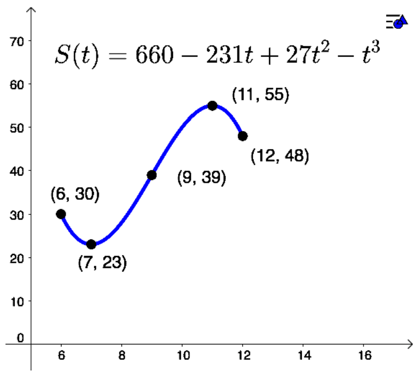
La audiencia es *mínima* en $t = 11 \implies 23:00\ h$, con un *share* del $S(11) = 55\,\%$

La audiencia es *máxima* en $t = 7 \implies 19:00\ h$, con un *share* del $S(7) = 23\,\%$

b)
- `Corte con los ejes:`
  Estudiando la monotonía, vemos que el mínimo de $S(t)$ en $[6, 12]$ es mayor que cero, por lo que en ese intervalo la función no corta al eje OX.
  La función $S(t)$ no corta con el eje OY en el $\text{Dom} = [6, 12]$

- Curvatura de $S(t)$: $S''(t) = 54 - 6t = 0 \implies t = 9$

	$(6,9)$	$(7,12)$
Signo $S'(t)$	-	+
$S(t)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$



La función $S(t)$ es *cóncava* en $(6,9)$ y *convexa* en (9.12), y tiene un *punto de inflexión* en $(9,39)$.

Problema 4 (3 *puntos*)

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & , \, six \leq 2 \\ \dfrac{2x+71}{4x+7} & , \, si\ x > 2 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$.

b) (1.5 puntos) Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$, dibujando el recinto correspondiente.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, por lo que solo hay que estudiar la continuidad en la frontera $x = 2$.

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x - 1) = 5$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+71}{4x+7} = 5$
- $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

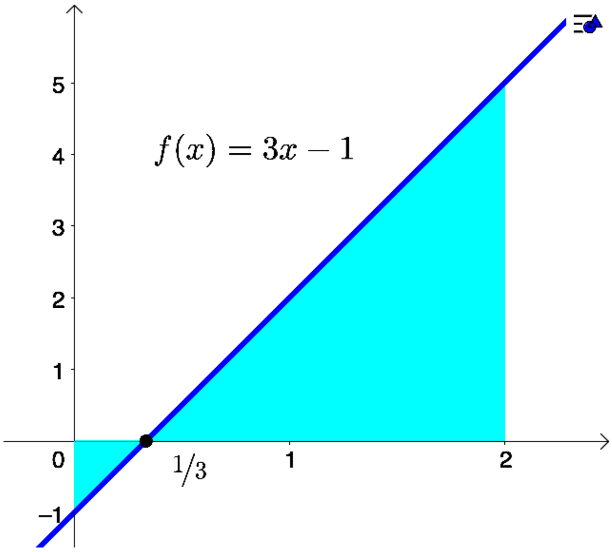
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$
$\implies f(x)$ es continua en $x = 2$

b) En el intervalo $[0,2]$, la función es $f_1(x) = 3x - 1 = 0 \implies x = 1/3$, lo que define dos recintos de integración: $A_1 : (0.1/3)$ y $A_2 : (1/3, 2)$

$$A_1 = \int_0^{1/3} f(x)\,dx = \int_0^{1/3} (3x-1)\,dx = \left.\frac{3x^2}{2} - x\right]_0^{1/3} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) - (0) = -\frac{1}{6}$$

$$A_2 = \int_{1/3}^{2} f(x)\,dx = \int_{1/3}^{2} (3x-1)\,dx = \left.\frac{3x^2}{2} - x\right]_{1/3}^{2} = (6-2) - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{6}$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{13}{3} \simeq 4.33\ u^2$$



Problema 5 (3 *puntos*)

El tiempo que un autobús urbano tarda en realizar su ruta se ajusta a una distribución Normal con media de 24 minutos y desviación típica de 8 minutos. Si cada día el autobús realiza 40 veces su ruta:

a) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en un día el tiempo medio de las 40 rutas esté entre 22 y 27 minutos.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el autobús emplee más de 1080 minutos en total cada día para realizar su ruta esas 40 veces.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

$$X \equiv \text{"Tiempo en realizar la ruta (minutos)"} \longrightarrow X : \mathcal{N}(24, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(24, 8) \xrightarrow{n=40} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(24, \dfrac{8}{\sqrt{40}}\right) = N(24, 1.26)$

$$P\left(22 < \overline{X} < 27\right) = P\left(\frac{22-24}{1.26} < Z < \frac{27-24}{1.26}\right) = P(-1.58 < Z < 2.37)$$
$$= P(Z < 2.37) - P(Z < -1.58) = P(Z < 2.37) - P(Z > 1.58)$$
$$= P(Z < 2.37) - \left[1 - P(Z < 1.58)\right] = 0.9911 - (1 - 0.9429) = 0.934$$

b) Que la suma de las 40 rutas sea mayor que 1080 es lo mismo que decir que el tiempo medio de cada ruta sea mayor que $1080/40 = 27$

$$P\left(\overline{X} > 27\right) = P\left(Z > \frac{27-24}{1.26}\right) = P(Z > 2.37) = 1 - P(Z < 2.37)$$
$$= 1 - 0.9911 = 0.0089$$

Problema 6 (2 *puntos*)

Una academia que prepara oposiciones está evaluando la calidad de sus resultados. Para ello toma una muestra de 50 opositores y comprueba que 20 han aprobado. Con esta información:

a) (2 puntos) Determinar los parámetros media y desviación típica de la proporción muestral que estima la proporción de opositores aprobados. Calcular, utilizando la dIstribución normal asociada, la probabilidad de que la proporción muestral de aprobados esté entre el 35 % y el 45 %

b) (1 punto) Calcular un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de opositores aprobados de la academia.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

$$n = 50 \quad \& \quad \hat{p} = \frac{20}{50} = 0.4 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.6$$

a) $\mu = \hat{p} = 0.4 \qquad \& \qquad \sigma = \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = \sqrt{\dfrac{0.4\cdot 0.6}{50}} = 0.0693$

$$\begin{aligned} P(35 < p < 45) &= P\Big(\frac{0.35-0.4}{0.0693} < Z < \frac{0.45-0.4}{0.0693}\Big) = P(-0.72 < Z < 0.72) \\ &= P(Z < 0.72) - P(Z < -0.72) = P(Z < 0.72) - P(Z > 0.72) \\ &= P(Z < 0.72) - \Big[1 - P(Z < 0.72)\Big] = 2P(Z < 0.72) - 1 \\ &= 2\cdot 0.7642 - 1 = 0.5284 \end{aligned}$$

b) $1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.645\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{50}} = 0.114$$

$$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p}-E;\hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0.286; 0.514)}$$

Cuestión 1 (1 *punto*)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. *Calcular, cuando sea posible, los productos matriciales* AB *y* BA.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

$$\underset{1\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 1}{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 1}{B} \cdot \underset{1\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Cuestión 2 (1 *punto*)

Calcular el área limitada por la función $y = x^2$ *y el eje* OX *entre los puntos* $x = -1$ *y* $x = 2$.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Análisis)

Solución.

$y = x^2 = 0 \implies x = 0$, lo que define dos recintos $A_1 : (-1, 0)$ y $A_2 : (0, 2)$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3\ u^2$$

Cuestión 3 (1 *punto*)

La ficha técnica del estudio social La vida en la Frontera con Portugal *indica que se ha encuestado a* 4450 *individuos mayores de* 14 *años, residentes en Castilla y León que viven a menos de* 25 *km de la frontera con Portugal. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos de la población satisfechos con su zona de residencia es de* $\pm 1.4\,\%$ *fijada una confianza del* $95\,\%$.
Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Bloque Análisis)

Solución.

`Población:` Individuos mayores de 14 años, residentes en Castilla y León que viven a menos de 25 km de la frontera con Portugal.
`Diseño muestral:` Muestra estratificada con m.a.s. por estratos.
`Tamaño muestral:` 4450.
`Parámetro estudiado:` Proporción de individuos satisfechos con zona de residencia.
