MATEMATICAS CCSS
PROBABILIDAD TOTAL

https://aprendeconmigomelon.com

10 de marzo de 2023

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

En este libro he reunido una serie de ejercicios de Probabilidad Total, la mayoría de los cuales están seleccionados de exámenes de Matemáticas aplicadas a las CCSS de la EVAU de varias Comunidades. En total casi 100 problemas resueltos que espero que te resulten de utilidad. Si quieres más ejercicios te recomiendo el libro equivalente de Matemáticas II, pues en este tema en concreto el nivel es similar.

Índice general

Ejercicios de Probabilidad Total

Ejercicio 1

En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas.

a) *Tomada una silla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?*

b) *Si se coge una silla que no es nueva, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga respaldo.*

Solución.

Sean los sucesos:

$R \equiv$ "La silla tiene respaldo" $\qquad N \equiv$ "La silla es nueva"

1ª Forma: Tabla de Contingencia

Resolveremos el ejercicio mediante una tabla de contingencia en donde pondremos los datos y completaremos el resto (en azul).

	R	$\overline{R}$	**Total**
N	7	3	10
$\overline{N}$	23	7	30
Total	30	10	40

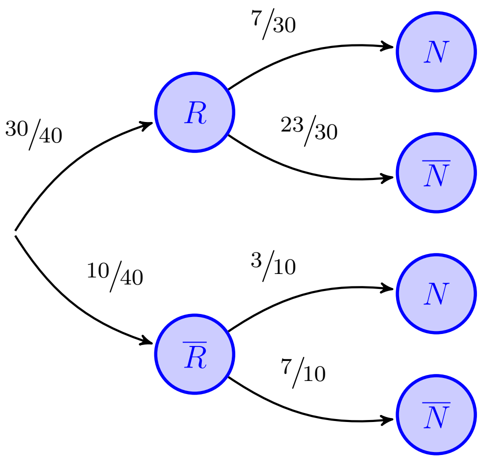
a) $P(N) = \dfrac{10}{40} = 0.25$

b) $P(\overline{R} \mid \overline{N}) = \dfrac{7}{30} = 0.2333$

2ª Forma: Diagrama de árbol

$$P(R) = \frac{30}{40} \quad \& \quad P(R \cap N) = P(R) \cdot P(N \mid R) \Rightarrow P(N \mid R) = \frac{P(R \cap N)}{P(R)} = \frac{7/40}{30/40} = \frac{7}{30}$$

$$P(\overline{R} \cap N) = P(\overline{R}) \cdot P(N \mid \overline{R}) \implies P(N \mid \overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \cap N)}{P(\overline{R})} = \frac{3/40}{1 - 30/40} = \frac{3}{10}$$



a)
$$\begin{aligned} P(N) &= P\big((R \cap N) \cup (\overline{R} \cap N)\big) \\ &= P(R \cap N) + P(\overline{R} \cap N) \\ &= P(R) \cdot P(N \mid R) + P(\overline{R}) \cdot P(N \mid \overline{R}) \\ &= \frac{30}{40} \cdot \frac{7}{30} + \frac{10}{40} \cdot \frac{3}{10} = 0.25 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(\overline{R} \mid \overline{N}) &= \frac{P(\overline{R} \cap \overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{P(\overline{R}) \cdot P(\overline{N} \mid \overline{R})}{1 - P(N)} \\ &= \frac{10/40 \cdot 7/10}{1 - 0.25} = 0.2333 \end{aligned}$$

Ejercicio 2

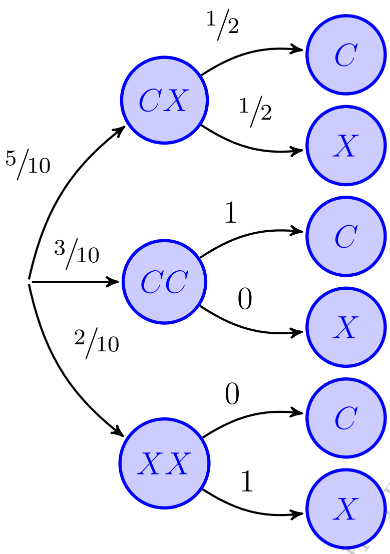
Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz, otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza.

a) *Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento.*

b) *Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?*

Solución.

$CX \equiv$ "Elegir una moneda con cara y cruz" $CC \equiv$ "Elegir una moneda con dos caras"
$XX \equiv$ "Elegir una moneda con dos cruces" $C \equiv$ "Salir cara en el lanzamiento"
$X \equiv$ "Salir curz en el lanzamiento"



a) $$P(C) = P\big((CX \cap C) \cup (CC \cap C) \cup (XX \cap C)\big)$$
$$= (CX \cap C) + P(CC \cap C) + P(XX \cap C)$$
$$= P(CX) \cdot P(C \mid CX) + P(CC) \cdot P(C \mid CC)$$
$$+ P(XX) \cdot P(C \mid XX) = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2}$$
$$+ \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot 0 = \frac{11}{20}$$

b) $$P(CX \mid C) = \frac{P(CX \cap C)}{P(C)} = \frac{P(CX) \cdot P(C \mid CX)}{P(C)}$$
$$= \frac{1/2 \cdot 1/2}{11/20} = \frac{5}{11}$$

Ejercicio 3

Se tiene tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera, 4 blancas y 3 negras.

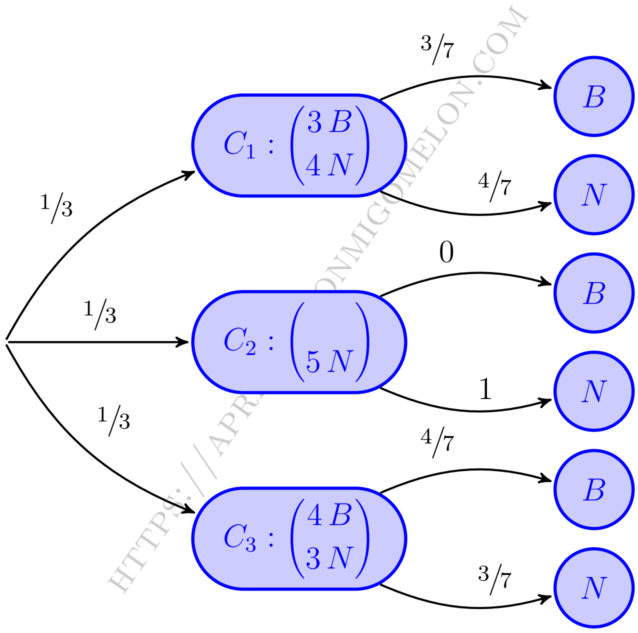
a) Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

Solución.

Sean los sucesos:

$$C_i \equiv \text{“La bola extraída es de la caja i”}$$
$$B \equiv \text{“La bola extraída es blanca”}$$
$$N \equiv \text{“La bola extraída es negra”}$$



a) $P(N) = P\Big((C_1 \cap N) \cup (C_2 \cap N) \cup (C_3 \cap N)\Big) = P(C_1 \cap N) + P(C_2 \cap N) + P(C_3 \cap N)$

$$= P(C_1) \cdot P(N \mid C_1) + P(C_2) \cdot P(N \mid C_2) + P(C_3) \cdot P(N \mid C_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$$

b) $P(C_2 \mid N) = \dfrac{P(C_2 \cap N)}{P(N)} = \dfrac{P(C_2) \cdot P(N \mid C_2)}{P(N)} = \dfrac{{}^1/_3 \cdot 1}{{}^2/_3} = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 4

Tenemos dos urnas A y B y una moneda trucada de manera que la probabilidad de sacar cara es tres veces la de sacar cruz. La urna A contiene 4 bolas rojas y 5 blancas. La urna B contiene 6 bolas rojas y 4 blancas. Se lanza la moneda al aire. Si sale cara se pasa una bola de la urna A a la urna B, si sale cruz se pasa una bola de la urna B a la urna A. Se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) La bola extraída sea blanca.

b) Sabiendo que la bola extraida es roja calcúlese la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda halla salido cruz.

Solución.

Sean los sucesos:

$C \equiv$ "Ha salido cara en la moneda" $\quad X \equiv$ "Ha salido cruz en la moneda"
$b \equiv$ "Se pasa una bola blanca" $\quad r \equiv$ "Se pasa bola roja"
$B \equiv$ "Se extrae bola blanca de la urna B" $\quad R \equiv$ "Se extrae bola roja de la urna B"

Teniendo en cuenta que la moneda está trucada y que la probabilidad de sacar cara es tres veces la de sacar cruz:

$$\left.\begin{array}{l} P(C) = 3P(X) \\ P(C) + P(X) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 3P(X) + P(X) = 1 \Longrightarrow 4P(X) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} P(C) = 3/4 \\ P(X) = 1/4 \end{cases}$$

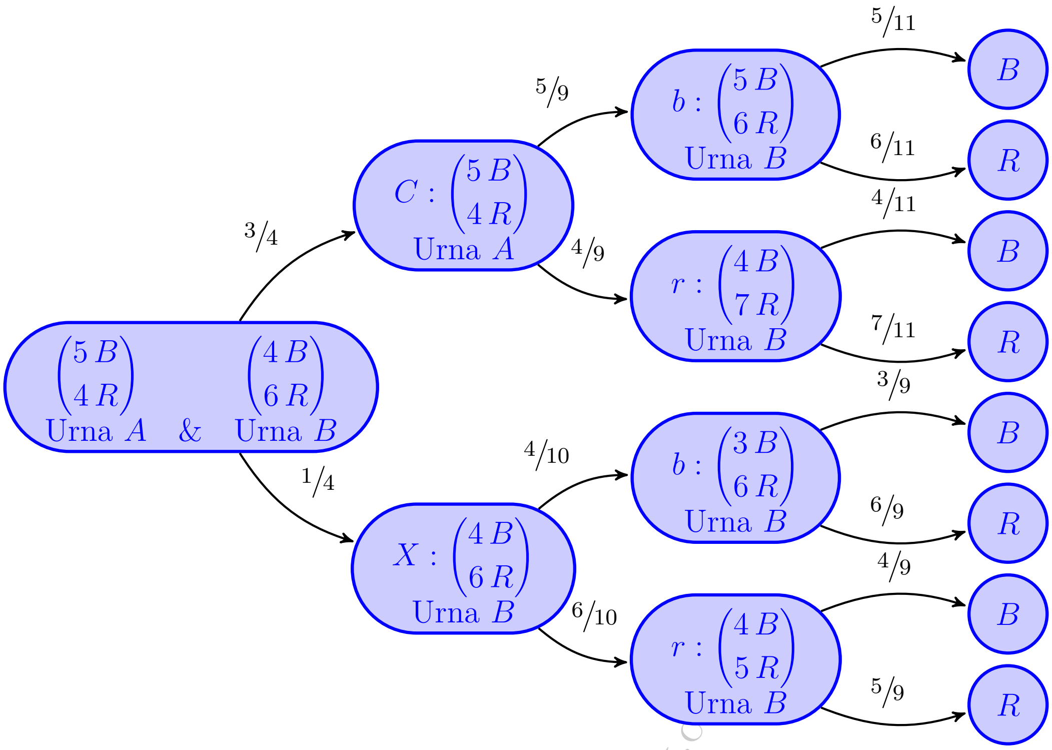
Si sale cara en la moneda pasamos una bola de la urna A a la urna B. La configuración de la urna B será:

$$C \Longrightarrow \begin{cases} P(b \mid C) = 5/9 \Longrightarrow \underset{\text{Urna } B}{\begin{pmatrix} 5B \\ 6R \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{cases} P(B \mid C \cap b) = 5/11 \\ P(R \mid C \cap b) = 6/11 \end{cases} \\ P(r \mid C) = 4/9 \Longrightarrow \underset{\text{Urna } B}{\begin{pmatrix} 4B \\ 7R \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{cases} P(B \mid C \cap r) = 4/11 \\ P(R \mid C \cap r) = 7/11 \end{cases} \end{cases}$$

Mientras que si sale cruz pasamos una bola de la urna B a la urna A. La configuración de la urna B será:

$$X \Longrightarrow \begin{cases} P(b \mid C) = 4/10 \Longrightarrow \underset{\text{Urna}B}{\begin{pmatrix} 3B \\ 6R \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{cases} P(B \mid C \cap b) = 3/9 \\ P(R \mid C \cap b) = 6/9 \end{cases} \\ P(r \mid C) = 6/10 \Longrightarrow \underset{\text{Urna}B}{\begin{pmatrix} 4B \\ 5R \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{cases} P(B \mid C \cap r) = 4/9 \\ P(R \mid C \cap r) = 5/9 \end{cases} \end{cases}$$

Conviene darse cuenta de que si sale cara la urna B, termina con una bola más que las iniciales 10 que tenía, mientras que si sale cruz, terminará con una bola menos.



a) $P(B) = P\big((C\cap b\cap B)\cup(C\cap r\cap B)\cup(X\cap b\cap B)\cup(X\cap r\cap B)\big)$

$$= P(C\cap b\cap B) + P(C\cap r\cap B) + P(X\cap b\cap B) + P(X\cap r\cap B)$$

$$= P(C\cap b)\cdot P(B\mid C\cap b) + P(C\cap r)\cdot P(B\mid C\cap r)$$

$$+ P(X\cap b)\cdot P(B\mid X\cap b) + P(X\cap r)\cdot P(B\mid X\cap r)$$

$$= P(C)\cdot P(b\mid C)\cdot P(B\mid C\cap b) + P(C)\cdot P(r\mid C)\cdot P(B\mid C\cap r)$$

$$+ P(X)\cdot P(b\mid X)\cdot P(B\mid X\cap b) + P(X)\cdot P(r\mid X)\cdot P(B\mid X\cap r)$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{11} + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{11} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = 0.411$$

b) $P(X\mid R) = \dfrac{P(X\cap R)}{P(R)} = \dfrac{P\big((X\cap b\cap R)\cup(X\cap r\cap R)\big)}{1-P(B)}$

$$= \frac{P(X\cap b\cap R) + P(X\cap r\cap R)}{1-P(B)}$$

$$= \frac{P(X)\cdot P(b\mid X)\cdot P(R\mid X\cap b) + P(X)\cdot P(r\mid X)\cdot P(R\mid X\cap r)}{1-P(B)}$$

$$= \frac{1/4\cdot 4/10\cdot 6/9 + 1/4\cdot 6/10\cdot 5/9}{1-0.411} = 0.2547$$

Ejercicios de EVAU

Andalucia

Ejercicio 5

Se sabe que el 30 % de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95 % tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60 % tiene empleo.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar, tenga empleo.

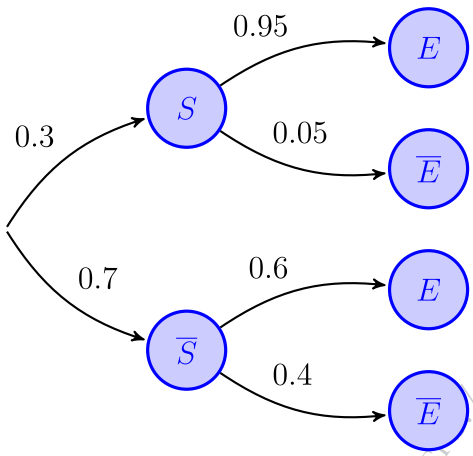
b) Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque C)

Solución.

Sean los sucesos:

$$S \equiv \text{“El individuo tiene estudios superiores”}$$
$$E \equiv \text{“El individuo tiene empleo”}$$



a)
$$\begin{aligned} P(E) &= P\big((S\cap E)\cup(\overline{S}\cap E)\big) \\ &= P(S\cap E)+P(\overline{S}\cap E) \\ &= P(S)\cdot P(E\mid S)+P(\overline{S})\cdot P(E\mid \overline{S}) \\ &= 0.3\cdot 0.95+0.7\cdot 0.6 = 0.705 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(S\mid E) &= \frac{P(S\cap E)}{P(E)} = \frac{P(S)\cdot P(E\mid S)}{P(E)} \\ &= \frac{0.3\cdot 0.95}{0.705} = 0.40425 \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B, contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 5000 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 3000 reciben la vacuna A, 1500 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B, generan anticuerpos, no generando anticuerpos los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

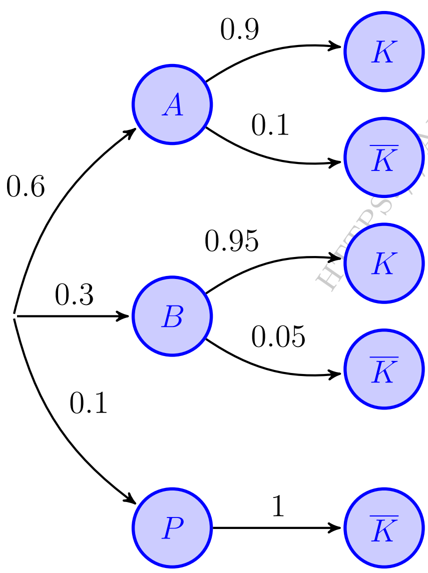
b) Si dicho voluntarios no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque C)

Solución.

Sean los sucesos

$$A = \text{“Al paciente se le suministra la vacuna } A\text{”}$$
$$B = \text{“Al paciente se le suministra la vacuna } B\text{”}$$
$$P = \text{“Al paciente se le suministra un placebo”}$$
$$K = \text{“El paciente genera anticuerpos”}$$



$$P(A) = \frac{3000}{5000} = 0.6 \quad \& \quad P(B) = \frac{1500}{5000} = 0.3$$

$$P(P) = \frac{500}{5000} = 0.1$$

a) $$\begin{aligned} P(K) &= P\big((A \cap K) \cup (B \cap K)\big) \\ &= P(A \cap K) + P(B \cap K) \\ &= P(A) \cdot P(K \mid A) + P(B) \cdot P(K \mid B) \\ &= 0.6 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.95 + 0.1 \cdot 0 = 0.825 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(P \mid \overline{K}) &= \frac{P(P \cap \overline{K})}{P(\overline{K})} = \frac{P(P) \cdot P(\overline{K} \mid P)}{1 - P(K)} \\ &= \frac{0.1 \cdot 1}{1 - 0.825} = 0.5714 \end{aligned}$$

Ejercicio 7

En una determinada muestra de suelo se han aislado dos tipos de bacterias, A y B, de las cuales el $70\,\%$ son de A y el $30\,\%$ de B. La probabilidad de que una bacteria de tipo A reaccione a la prueba del nitrato es 0.15 y para la bacteria B es 0.8. De las bacterias aisladas se selecciona una al azar.

a) *Calcule la probabilidad de que reaccione a la prueba del nitrato.*

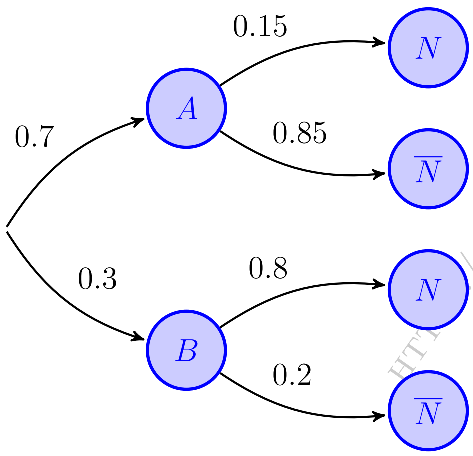
b) *Si la bacteria ha reaccionado a la prueba del nitrato, calcule la probabilidad de que sea del tipo B.*

c) *Calcule la probabilidad de que la bacteria sea del tipo A y no reacciones a la prueba del nitrato.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque C -Reserva)

Solución. Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La bacteria es del tipo } A\text{”}$$
$$B \equiv \text{“La bacteria es del tipo } B\text{”}$$
$$N \equiv \text{“La bacteria reacciona a la prueba del nitrato”}$$



a) $P(N) = P\big((A \cap N) \cup (B \cap N)\big)$
$$= P(A \cap N) + P(B \cap N)$$
$$= P(A) \cdot P(N \mid A) + P(B) \cdot P(N \mid B)$$
$$= 0.7 \cdot 0.15 + 0.3 \cdot 0.8 = 0.345$$

b) $$P(B \mid N) = \frac{P(B \cap N)}{P(N)} = \frac{P(B) \cdot P(N \mid B)}{P(N)}$$
$$= \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.345} = 0.69565$$

c) $$P(A \cap \overline{N}) = P(A) \cdot P(\overline{N} \mid A) = 0.7 \cdot 0.85$$
$$= 0.595$$

Ejercicio 8

Una determinada ciudad tiene en la plantilla del ayuntamiento 1000 agentes de la policía local, 600 bomberos y 400 funcionarios de protección civil. En esta plantilla, el 42 % de policías, el 20 % de bomberos y el 50 % de funcionarios de protección civil son mujeres. Se elige una persona al azar de la plantilla.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

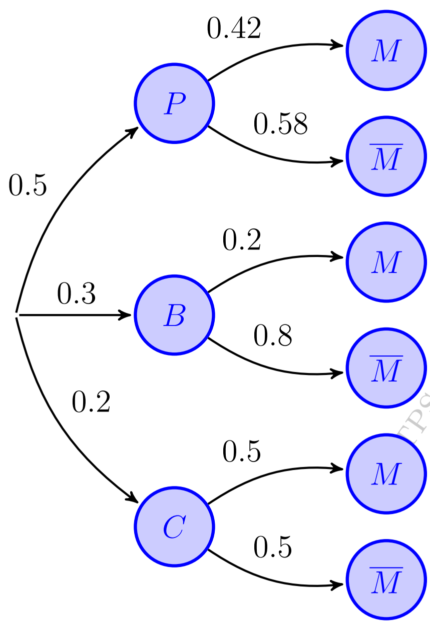
b) Si la persona elegida es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea bombero?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque C - Suplente)

Solución.

Sean los sucesos:

$P \equiv$ "El trabajador es policía local" $\quad B \equiv$ "El trabajador es bombero"
$C \equiv$ "El trabajador es de protección civil" $\quad M \equiv$ "El trabajador es mujer"
$\overline{M} \equiv$ "El trabajador es hombre"



$$P(P) = \frac{1000}{1000 + 600 + 400} = 0.5$$

$$P(B) = \frac{600}{2000} = 0.3 \quad \& \quad P(C) = \frac{400}{2000} = 0.2$$

a) $$\begin{aligned} P(M) &= P\big((P\cap M)\cup(B\cap M)\cup(C\cap M)\big) \\ &= P(P\cap M) + P(B\cap M) + P(C\cap M) \\ &= P(P)\cdot P(M\mid P) + P(B)\cdot P(M\mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(M\mid C) = 0.5\cdot 0.42 \\ &+ 0.3\cdot 0.2 + 0.2\cdot 0.5 = 0.37 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(B\mid \overline{M}) &= \frac{P(B\cap\overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(B)\cdot P(\overline{M}\mid B)}{1-P(M)} \\ &= \frac{0.3\cdot 0.8}{1-0.37} = 0.381 \end{aligned}$$

Ejercicio 9

Una urna A contiene 4 bolas rojas y 5 verdes y otra urna B contiene 6 bolas rojas y 3 verdes. Lanzamos dos dados y si la suma es mayor o igual a 9, extraemos una bola de la urna A y en caso contrario lla extraemos de la urna B.

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea verde y de la urna B.

b) Halle la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque C - Suplente)

Solución.

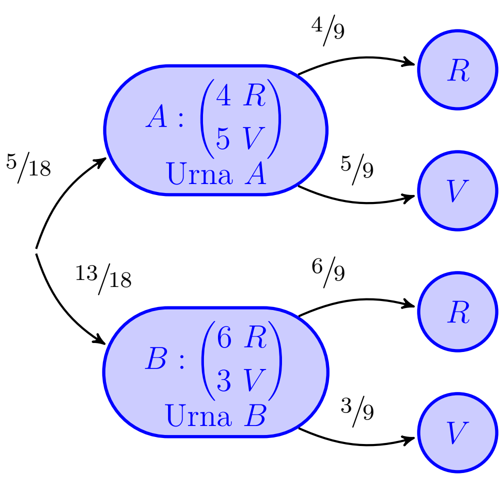
Para calcular la probabilidad de que la suma de los dados sea mayor o igual que 9 vamos a hallar el espacio muestral del experimento “Lanzar dos dados” y la suma de los mismos:

	1	2	3	4	5	6
1	$\{1,1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,5\}$	$\{1,6\}$
2	$\{2,1\}$	$\{2,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{2,5\}$	$\{2,6\}$
3	$\{3,1\}$	$\{3,2\}$	$\{3,3\}$	$\{3,4\}$	$\{3,5\}$	$\{3,6\}$
4	$\{4,1\}$	$\{4,2\}$	$\{4,3\}$	$\{4,4\}$	$\{4,5\}$	$\{4,6\}$
5	$\{5,1\}$	$\{5,2\}$	$\{5,3\}$	$\{5,4\}$	$\{5,5\}$	$\{5,6\}$
6	$\{6,1\}$	$\{6,2\}$	$\{6,3\}$	$\{6,4\}$	$\{6,5\}$	$\{6,6\}$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

De esta forma $P(Suma \geq 9) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$ Sean los sucesos:

$A \equiv$ “La suma es ≥ 9 (se extrae la bola de la urna A)”
$B \equiv$ “La suma es < 9 (se extrae la bola de la urna B)”
$R \equiv$ “La bola extraída es roja”
$V \equiv$ “La bola extraída es verde”



a) $P(V \cap B) = P(B) \cdot P(V \mid B)$
$$= \frac{13}{18} \cdot \frac{3}{9} = \frac{13}{54} = 0.2407$$

b) $P(R) = P\big((A \cap R) \cup (B \cap R)\big)$
$$= P(A \cap R) + P(B \cap R)$$
$$= P(A) \cdot P(R \mid A)$$
$$+ P(B) \cdot P(R \mid B) = \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{9}$$
$$+ \frac{13}{18} \cdot \frac{6}{9} = \frac{49}{81} = 0.6049$$

Ejercicio 10

En una población, se sabe que el 15 % de las personas padece una determinada enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos, mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4 % de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población,

a) Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

b) Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

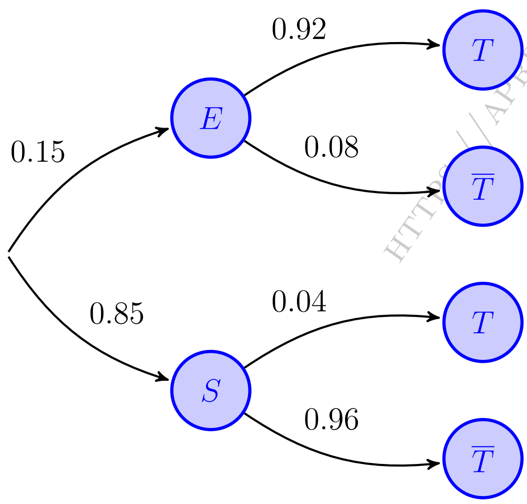
c) Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque C - Extraordinario)

Solución.

Sean los sucesos:

$E \equiv$ "La persona padece la enfermedad"
$S \equiv$ "La persona está sana"
$T \equiv$ "La persona da positivo en el test"



a) $$P(T) = P\big((E \cap T) \cup (S \cap T)\big) = P(E \cap T) + P(S \cap T) = P(E) \cdot P(T \mid E) + P(S) \cdot P(T \mid S) = 0.15 \cdot 0.92 + 0.85 \cdot 0.04 = 0.172$$

$$P(E \mid T) = \frac{P(E \cap T)}{P(T)} = \frac{P(E) \cdot P(T \mid E)}{P(T)} = \frac{0.15 \cdot 0.92}{0.172} = 0.80225$$

b) $$P(E \cap \overline{T}) = P(E) \cdot P(\overline{T} \mid E) = 0.15 \cdot 0.08 = 0.012$$

c) $$P(E \mid \overline{T}) = \frac{P(E \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(E) \cdot P(\overline{T} \mid E)}{1 - P(T)} = \frac{0.15 \cdot 0.08}{1 - 0.172} = 0.0145$$

Ejercicio 11

Una empresa dedicada a la fabricación de coches lanza al mercado un nuevo modelo que fabrica en tres plantas diferentes, A, B y C. La planta A produce el $45\,\%$ de los vehículos, la planta B el $21\,\%$ y el resto los produce la planta C. Se ha detectado un defecto en la colocación del airbag, que afecta al $1\,\%$ de los coches procedentes de la planta A, al $3\,\%$ de los procedentes de la planta B y al $2\,\%$ de los de la planta C. Se selecciona un coche al azar de este nuevo modelo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y proceda de la planta C?

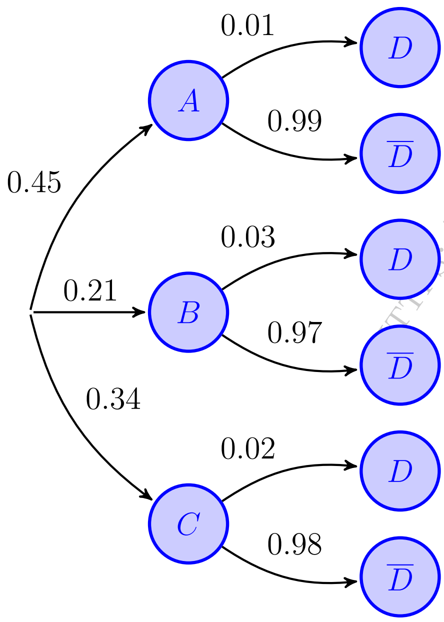
b) Si el coche elegido no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la planta A?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque C - Reserva)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El vehículo se fabrica en la planta A"
$B \equiv$ "El vehículo se fabrica en la planta B"
$C \equiv$ "El vehículo se fabrica en la planta C"
$D \equiv$ "El vehículo tiene un defecto en el airbag"



a) $$P(C\cap\overline{D}) = P(C)\cdot P(\overline{D}\mid C) = 0.34\cdot 0.98 = 0.3332$$

b) $$\begin{aligned} P(\overline{D}) &= P\big((A\cap\overline{D})\cup(B\cap\overline{D})\cup(C\cap\overline{D})\big)\\ &= P(A\cap\overline{D})+P(B\cap\overline{D})+P(C\cap\overline{D})\\ &= P(A)\cdot P(\overline{D}\mid A)+P(B)\cdot P(\overline{D}\mid B)\\ &+ P(C)\cdot P(\overline{D}\mid C) = 0.45\cdot 0.99\\ &+ 0.21\cdot 0.97+0.34\cdot 0.98 = 0.9824 \end{aligned}$$

$$P(A\mid\overline{D}) = \frac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A)\cdot P(\overline{D}\mid A)}{P(\overline{D})} = \frac{0.45\cdot 0.99}{0.9824} = 0.45346$$

Ejercicio 12

La probabilidad de que una persona sana se contagie de otra enferma por un virus es del 80 % si coinciden en una reunión.

a) Si una persona enferma se reúne con dos personas sanas, teniendo en cuenta que contagiar a distintas personas son sucesos independientes entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que se contagien las dos personas a la vez? ¿Cuál es la probabilidad de que se contagie alguna de ellas?

b) Una prueba para detectar la enfermedad da el resultado correcto en el 90 % de los casos cuando se le aplica a personas contagiadas y da falsos positivos en el 5 % de los casos cuando se aplica a personas sanas. Si una persona sana se reúne con una enferma y resulta positivo en una prueba posterior, ¿qué probabilidad hay de que se haya contagiado en la reunión?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque C - Reserva)

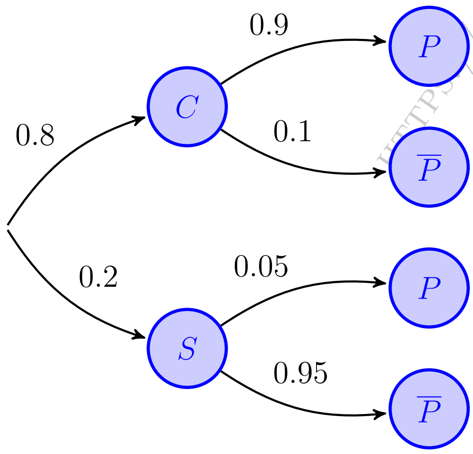
Solución.

Sean los sucesos:

$$C \equiv \text{“La persona se ha contagiado en la reunión”}$$
$$S \equiv \text{“La persona sigue sana tras la reunión”}$$
$$P \equiv \text{“La persona da positivo en el test”}$$

a) $P(C_1 \cap C_2) \underset{\textit{Indep.}}{\overset{C_1 \text{ y } C_2}{=}} P(C_1) \cdot P(C_2) = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64$

$P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) = 0.8 + 0.8 - 0.64 = 0.96$



b) $P(P) = P\big((C \cap P) \cup (S \cap P)\big)$

$$= P(C \cap P) + P(S \cap P)$$
$$= P(C) \cdot P(P \mid C) + P(S) \cdot P(P \mid S)$$
$$= 0.8 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.73$$

$$P(C \mid P) = \frac{P(C \cap P)}{P(P)} = \frac{P(C) \cdot P(P \mid C)}{P(P)}$$
$$= \frac{0.8 \cdot 0.9}{0.73} = 0.9863$$

Ejercicio 13

Un equipo andaluz de baloncesto jugó en una temporada un 40 % de los partidos en casa y el resto fuera. De los partidos que jugó en casa, obtuvo un 60 % de victorias y el resto fueron derrotas, mientras que de los que jugó fuera, obtuvo un 30 % de victorias y el resto derrotas. Se elige un partido de este equipo al azar.

a) Calcule la probabilidad de que el partido acabase en victoria.

b) Calcule la probabilidad de que el partido haya sido jugado en casa, sabiendo que el resultado final fue una derrota.

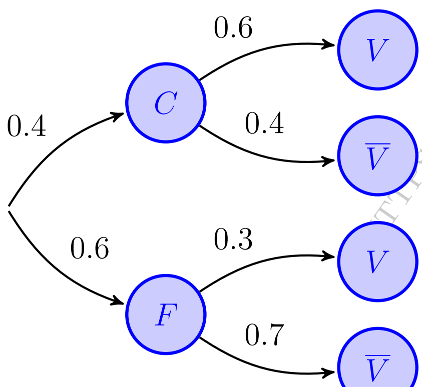
c) Si además se sabe que el 10 % de las victorias obtenidas en casa y el 20 % de las obtenidas fuera se produjeron tras una prórroga, calcule la probabilidad de que el partido acabase en victoria y que además esa victoria haya sido tras una prórroga.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Bloque C - Suplente)

Solución.

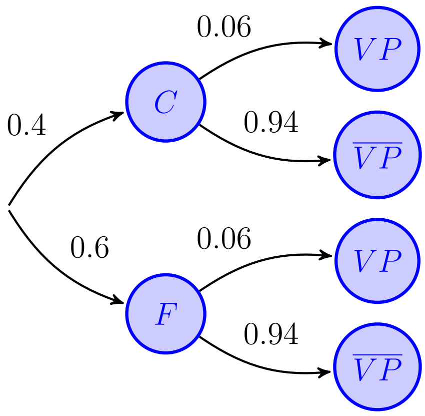
Sean los sucesos:

$$C \equiv \text{“El partido se jugó en casa”}$$
$$F \equiv \text{“El partido se jugó fuera”}$$
$$V \equiv \text{“El partido acabó en victoria”}$$
$$VP \equiv \text{“El partido acabó en victoria tras prórroga”}$$



a) $P(V) = P\big((C \cap V) \cup (F \cap V)\big)$
$= P(C \cap V) + P(F \cap V)$
$= P(C) \cdot P(V \mid C) + P(F) \cdot P(V \mid F)$
$= 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.3 = 0.42$

b) $$P(C \mid \overline{V}) = \frac{P(C \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{P(C) \cdot P(\overline{V} \mid C)}{1 - P(V)} = \frac{0.4 \cdot 0.4}{1 - 0.42} = 0.2759$$



c) $P(VP \mid C) = 0.1 \cdot 0.6 = 0.06$
$P(VP \mid F) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$
$P(VP) = P\big((C \cap VP) \cup (F \cap VP)\big)$
$= P(C \cap VP) + P(F \cap VP)$
$= P(C) \cdot P(VP \mid C) + P(F) \cdot P(VP \mid F)$
$= 0.4 \cdot 0.06 + 0.6 \cdot 0.06 = 0.06$

Ejercicio 14

El porcentaje de conductores que consumen alcohol durante la madrugada del sábado es del 5 %. La policía realiza controles de alcoholemia mediante un test del que se sabe que da positivo en un 96 % si la persona ha bebido alcohol y en un 10 % si la persona no ha bebido alcohol.
Elegido al azar un conductor en la madrugada del sábado y realizado este test de alcoholemia halle la probabilidad de que:

a) Si el test da positivo, el conductor haya consumido alcohol.

b) El test dé negativo y el conductor no haya consumido alcohol.

c) (0.75 puntos) Si el test ha dado negativo, el conductor no haya consumido alcohol.

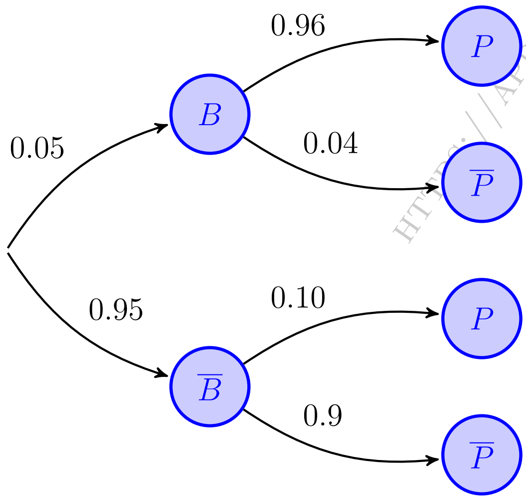
(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque C - Reserva)

Solución.

Sean los sucesos:

$$B \equiv \text{“El conductor ha bebido alcohol”}$$
$$P \equiv \text{“El test de alcoholemia da positivo”}$$

$$P(P) = P\Big((B\cap P)\cup(\overline{B}\cap P)\Big) = P(B\cap P) + P(\overline{B}\cap P)$$
$$= P(B)\cdot P(P\mid B) + P(\overline{B})\cdot P(P\mid \overline{B}) = 0.05\cdot 0.96 + 0.95\cdot 0.10 = 0.143$$



a) $P(B\mid P) = \dfrac{P(B\cap P)}{P(P)} = \dfrac{P(B)\cdot P(P\mid B)}{P(P)}$
$= \dfrac{0.05\cdot 0.96}{0.143} = 0.33559$

b) $P(\overline{P}\cap\overline{B}) = P(\overline{B})\cdot P(\overline{P}\mid\overline{B}) = 0.95\cdot 0.9$
$= 0.855$

c) $P(\overline{B}\mid\overline{P}) = \dfrac{P(\overline{B}\cap\overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{P(\overline{B})\cdot P(\overline{P}\mid\overline{B})}{1-P(P)}$
$= \dfrac{0.95\cdot 0.9}{1-0.143} = 0.9976$

Ejercicio 15

En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A, el 30 % de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0.4 y para un estudiante de B es 0.5.

a) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0.395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

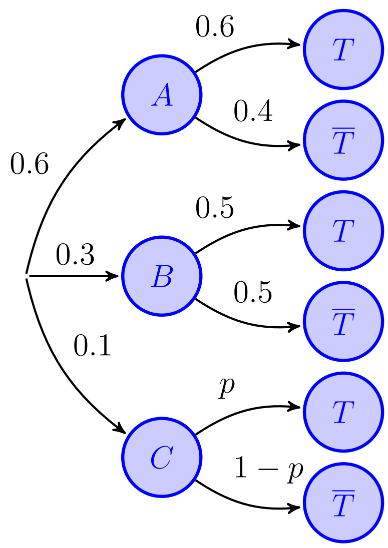
(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque C - Extraordinario)

Solución.

Sean los sucesos

$A \equiv$ "Estudiante de la universidad A" $\quad B \equiv$ "Estudiante de la universidad B"
$C \equiv$ "Estudiante de la universidad C" $\quad T \equiv$ "El estudiante encuentra trabajo"

a)
$$\begin{aligned} P(\overline{T}) &= P\big((A\cap\overline{T})\cup(B\cap\overline{T})\cup(C\cap\overline{T})\big) = P(A\cap\overline{T}) + P(B\cap\overline{T}) + P(C\cap\overline{T}) \\ &= P(A)\cdot P(\overline{T}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{T}\mid B) + P(C)\cdot P(\overline{T}\mid C) \\ &= 0.6\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.5 + 0.1\cdot(1-p) = 0.49 - 0.1p = 0.395 \implies p = 0.95 \\ &\implies \boxed{P(T\mid C) = 0.95} \end{aligned}$$



b)
$$\begin{aligned} P\big((A\cup B)\mid\overline{T}\big) &= \frac{P\big((A\cup B)\cap\overline{T}\big)}{\overline{T}} \\ &= \frac{P\big((A\cap\overline{T})\cup(B\cap\overline{T})\big)}{P(\overline{T})} \\ &= \frac{P(A\cap\overline{T}) + P(B\cap\overline{T})}{P(\overline{T})} \\ &= \frac{P(A)\cdot P(\overline{T}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{T}\mid B)}{P(\overline{T})} \\ &= \frac{0.6\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.5}{0.395} = 0.9873 \end{aligned}$$

Otra forma: $P\big((A\cup B)\mid\overline{T}\big) = 1 - P(C\mid\overline{T})$

$$= 1 - \frac{P(C\cap\overline{T})}{P(\overline{T})} = 1 - \frac{P(C)\cdot P(\overline{T}\mid C)}{P(\overline{T})}$$

$$= 1 - \frac{0.1\cdot(1-0.95)}{0.395} = 0.9873$$

Ejercicio 16

Del total de personas vacunadas en un país para prevenir una enfermedad, el 48 % recibió la vacuna A, el 35 % la vacuna B y el resto la vacuna C.

La efectividad de la vacuna A se sitúa en el 70 %, la de B en el 95 % y la de C en el 94 %. Elegida al azar una persona vacunada.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada con A y no le sea efectiva?

b) ¿Qué probabilidad hay de que la vacuna le sea efectiva?

c) (0.5 puntos) Sabiendo que la vacuna no le ha sido efectiva, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada con C?

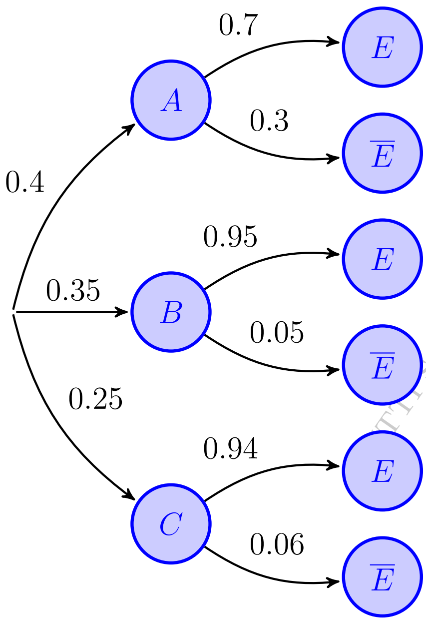
(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque C - Suplente)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La persona recibió la vacuna A" $\quad B \equiv$ "La persona recibió la vacuna B"

$C \equiv$ "La persona recibió la vacuna C" $\quad E \equiv$ "La vacuna es efectiva"

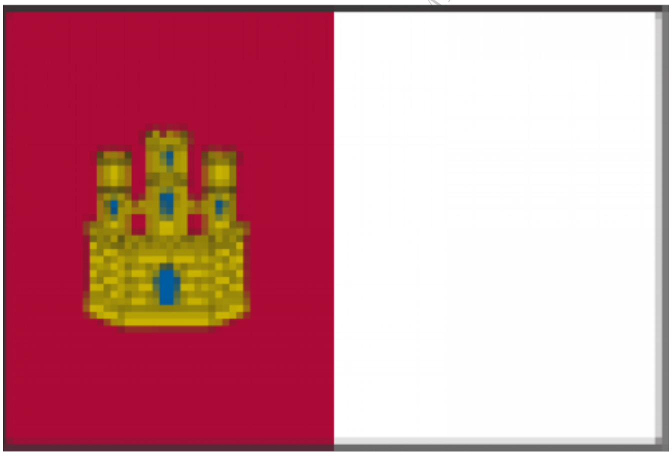


a) $P(A \cap \overline{E}) = P(A) \cdot P(\overline{E} \mid A) = 0.48 \cdot 0.3 = 0.144$

b)
$$\begin{aligned}
P(E) &= P\big((A \cap E) \cup (B \cap E) \cup (C \cap E)\big) \\
&= P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) \\
&= P(A) \cdot P(E \mid A) + P(B) \cdot P(E \mid B) \\
&+ P(C) \cdot P(E \mid C) = 0.48 \cdot 0.7 \\
&+ 0.35 \cdot 0.95 + 0.17 \cdot 0.94 = 0.8283
\end{aligned}$$

c)
$$P(C \mid \overline{E}) = \frac{P(C \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(C) \cdot P(\overline{E} \mid C)}{1 - P(E)} = \frac{0.17 \cdot 0.06}{1 - 0.8283} = 0.0594$$

Castilla-La Mancha



Ejercicio 17

El 70 % de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60 % de los que se alojan en el centro y el 40 % de los que se alojan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menos calidad.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas?

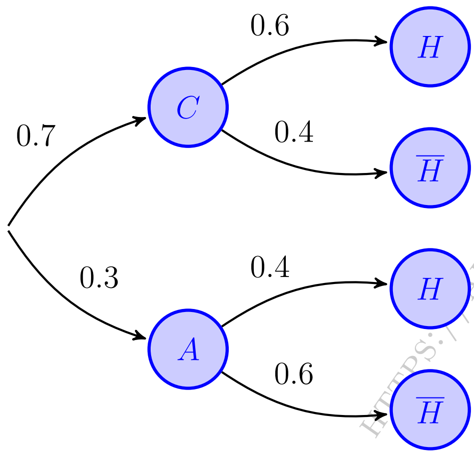
b) Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menos calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alojado en el centro?

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Sección 2 - Bloque 1)

Solución.

Sean los sucesos:

$$C \equiv \text{“El turista se aloja en el centro”}$$
$$A \equiv \text{“El turista se aloja en las afueras”}$$
$$H \equiv \text{“El turista se aloja en hotel de 3 o más estrellas”}$$



a) $$P(H) = P\big((C\cap H)\cup(A\cap H)\big) = P(C\cap H)+P(A\cap H) = P(C)\cdot P(H\mid C)+P(A)\cdot P(H\mid A) = 0.7\cdot 0.6 + 0.3\cdot 0.4 = 0.54$$

b) $$P(C\mid \overline{H}) = \frac{P(C\cap\overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{P(C)\cdot P(\overline{H}\mid C)}{1-P(H)} = \frac{0.7\cdot 0.4}{1-0.54} = 0.6087$$

Ejercicio 18

En un concurso se les proponen a los participantes 3 pruebas (A, B y C) de las que han de elegir una. El 40 % de los participantes eligen la prueba A, superándola el 50 % de estos. El 25 % eligen la prueba B y en este caso la prueba no es superada por el 45 % de los participantes. La prueba C la superan el 60 % de los participantes que la escogen.

a) *Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba?*

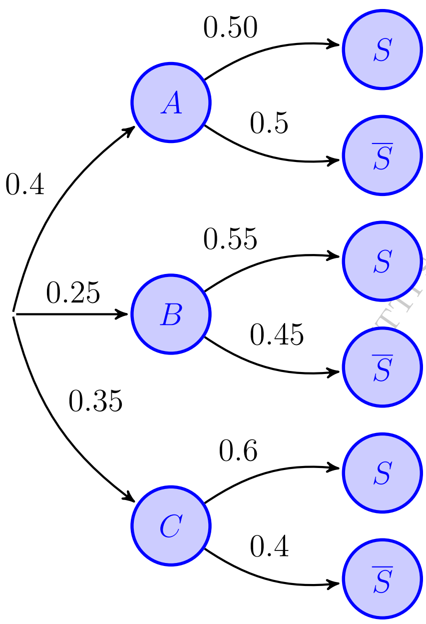
b) *Si se sabe que un participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba A?*

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Sección 2 - Bloque 1)

Solución.

Sean los sucesos:

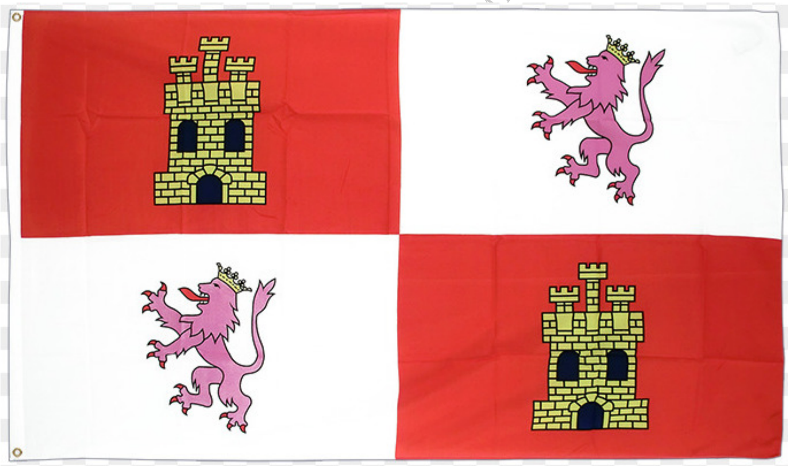
$$
\begin{aligned}
A &\equiv \text{“El participante elige la prueba } A\text{”}\\
B &\equiv \text{“El participante elige la prueba } B\text{”}\\
&\equiv \text{“El participante elige la prueba } C\text{”}\\
S &\equiv \text{“El participante supera la prueba”}
\end{aligned}
$$



a) $P(S) = P\big((A\cap S)\cup(B\cap S)\cup(C\cap S)\big)$
$= P(A\cap S) + P(B\cap S) + P(C\cap S)$
$= P(A)\cdot P(S\mid A) + P(B)\cdot P(S\mid B)$
$+ P(C)\cdot P(S\mid C) = 0.4\cdot 0.50$
$+ 0.25\cdot 0.55 + 0.35\cdot 0.6 = 0.5475$

b) $$P(A\mid \overline{S}) = \frac{P(A\cap\overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(A)\cdot P(\overline{S}\mid A)}{1-P(S)}$$
$$= \frac{0.4\cdot 0.5}{1-0.5475} = 0.442$$

Castilla y León



Ejercicio 19

Una empresa destinada a la comercialización de cápsulas de café realiza un estudio de mercado entre un grupo de personas donde el 60 % son hombres y el 40 % restante son mujeress. La empresa comprueba que el 55 % de los hombres prefieren cápsulas de café capuchino, porcentaje que se eleva al 80 % en el caso de las mujeres.

a) Calcular la probabilidad de elegir una persona de ese grupo que resulte ser hombre y que prefiera cápsulas de café capuchino.

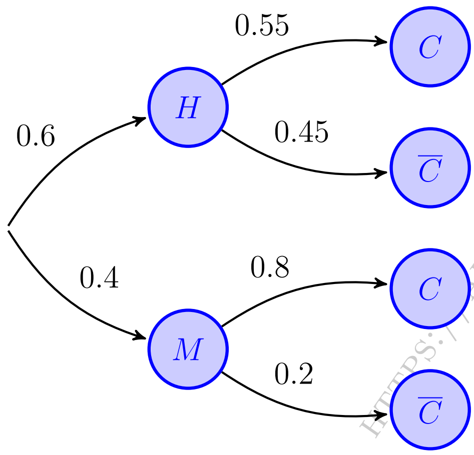
b) ¿Con qué probabilidad una persona elegida al azar de ese grupo prefiere cápsulas de café capuchino?

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque Probabilidad)

Solución.

Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“El encuestado es hombre”}$$
$$M \equiv \text{“El encuestado es mujer”}$$
$$C \equiv \text{“El encuestado prefiere el café capuchino”}$$



a) $P(H \cap C) = P(H) \cdot P(C \mid H)$
$= 0.6 \cdot 0.55 = 0.33$

b) $P(C) = P\big((H \cap C) \cup (M \cap C)\big)$
$= P(H \cap C) + P(M \cap C)$
$= P(H) \cdot P(C \mid H) + P(M) \cdot P(C \mid M)$
$= 0.6 \cdot 0.55 + 0.4 \cdot 0.8 = 0.65$

Ejercicio 20

En un gimnasio, el 52 % de los socios son hombres y el resto son mujeres. Entre los socios el 35 % de los hombres practica "spinning" así como el 60 % de las mujeres. Si elegimos un socio al azar.

a) Calcular la probabilidad de que practique "spinning".

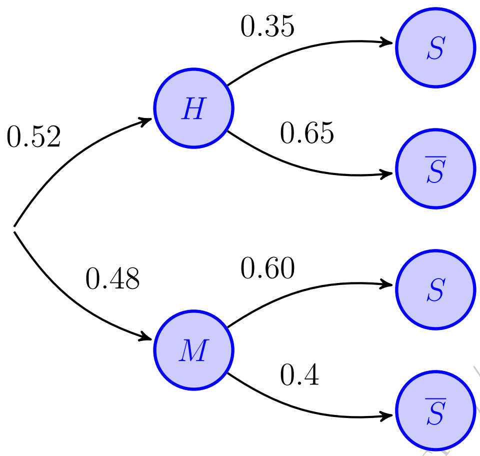
b) Si el socio elegido no prantica "spinning", obtener la probabilidad de que sea una mujer.

(Castilla y León - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque Probabilidad)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} H &\equiv \text{“El socio es hombre”} \\ M &\equiv \text{“El socio es mujer”} \\ S &\equiv \text{“El socio practica spinning”} \end{aligned}$$



a) $$\begin{aligned} P(S) &= P\big((H \cap S) \cup (M \cap S)\big) \\ &= P(H \cap S) + P(M \cap S) \\ &= P(H) \cdot P(S \mid H) + P(M) \cdot P(S \mid M) \\ &= 0.52 \cdot 0.35 + 0.48 \cdot 0.60 = 0.47 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(M \mid \overline{S}) &= \frac{P(M \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(M) \cdot P(\overline{S} \mid M)}{1 - P(S)} \\ &= \frac{0.48 \cdot 0.4}{1 - 0.47} = 0.3623 \end{aligned}$$

Comunidad de Madrid

Ejercicio 21

Si se escoge un número al azar en la guía telefónica de cierta ciudad española, la probabilidad de que sea nombre de un hombre es 0.7 y de que figure una mujer es 0.3. En dicha ciudad, la probabilidad de que un hombre trabaje es 0.8 y de que lo haga una mujer es 0.7. Se elige un número de teléfono al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una persona que trabaja?

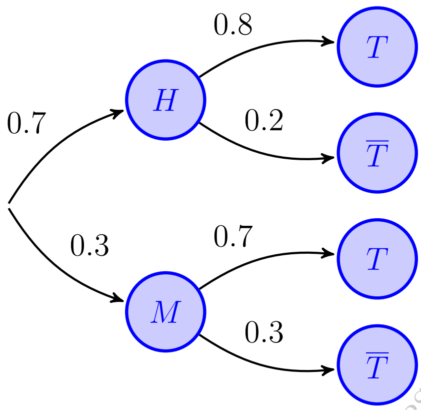
b) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a un hombre, sabiendo que pertenece a una persona que trabaja?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2000 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$H = \text{“El número elegido es de un hombre”}$$
$$M = \text{“El número elegido es de una mujer”}$$
$$T = \text{“El propietario del número de teléfono trabaja”}$$



a) $$\begin{aligned} P(T) &= P\big((H\cap T)\cup(M\cap T)\big) \\ &= P(H\cap T)+P(M\cap T) \\ &= P(H)\cdot P(T\mid H)+P(M)\cdot P(T\mid M) \\ &= 0.7\cdot 0.8+0.3\cdot 0.7 = 0.77 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(H\mid T) &= \frac{P(H\cap T)}{P(T)} = \frac{P(H)\cdot P(T\mid H)}{P(T)} \\ &= \frac{0.7\cdot 0.8}{0.77} = 0.727 \end{aligned}$$

Ejercicio 22

De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas?

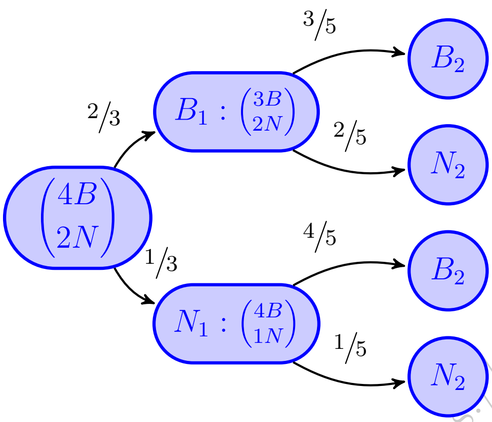
b) Si la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2000 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$B_i = \text{“Sacar bola blanca en la extracción } i\text{”}$$
$$N_i = \text{“Sacar bola negra en la extracción } i\text{”}$$



a) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$

b) $$P(N_1 \mid N_2) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1)}{P(N_2)} \overset{\circledast}{=} \frac{1/3 \cdot 1/5}{1/3} = \frac{1}{5}$$

$$\circledast\; P(N_2) = P\big((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap N_2)\big) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(B_1) \cdot P(N_2 \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 23

Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0.3; de que se remita al bufete B es 0.5 y de que se remita al bufete C es 0.2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0.6; para el bufete B esta probabilidad es de 0.8 y para el bufete C es 0.7.

a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso.

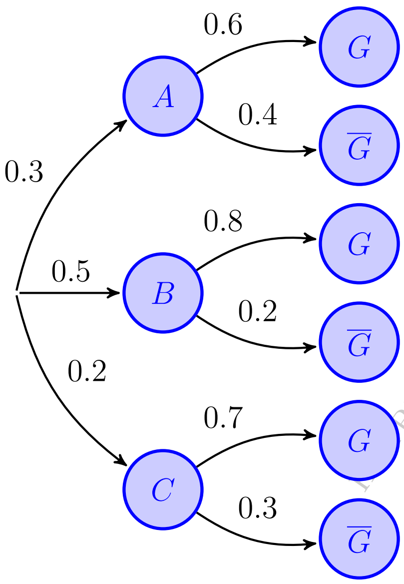
b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2000 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$A =$ "El caso es tratado por el bufete A" $\quad B =$ "El caso es tratado por el bufete B"
$C =$ "El caso es tratado por el bufete C" $\quad G =$ "El caso es ganado"



a)
$$\begin{aligned} P(G) &= P\big((A\cap G)\cup(B\cap G)\cup(C\cap G)\big) \\ &= P(A\cap G)+P(B\cap G)+P(C\cap G) \\ &= P(A)\cdot P(G\mid A)+P(B)\cdot P(G\mid B) \\ &+P(C)\cdot P(G\mid C) \\ &= 0.3\cdot 0.6+0.5\cdot 0.8+0.2\cdot 0.7=0.72 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(A\mid G) &= \frac{P(A\cap G)}{P(G)}=\frac{P(A)\cdot P(G\mid A)}{P(G)} \\ &= \frac{0.3\cdot 0.6}{0.72}=0.25 \end{aligned}$$

Ejercicio 24

En una ciudad la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0.4; la probabilidad de que vote al partido B es 0.35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0.25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0.4; 0.4 y 0.6. Se elige una persona de la ciudad al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.

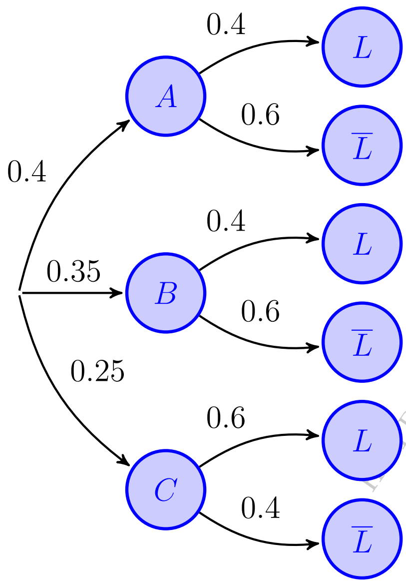
b) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2001 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

A = "La persona es votante del partido A" B = "La persona es votante del partido B"
C = "La persona es votante del partido C" L = "La persona lee diariamente el periódico"



a)
$$
\begin{aligned}
P(L) &= P\big((A\cap L)\cup(B\cap L)\cup(C\cap L)\big)\\
&= P(A\cap L)+P(B\cap L)+P(C\cap L)\\
&= P(A)\cdot P(L\mid A)+P(B)\cdot P(L\mid B)\\
&\quad + P(C)\cdot P(L\mid C)\\
&= 0.4\cdot 0.4+0.35\cdot 0.4+0.25\cdot 0.6 = 0.45
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
P(B\mid L) &= \frac{P(B\cap L)}{P(B)} = \frac{P(B)\cdot P(L\mid B)}{P(B)}\\
&= \frac{0.35\cdot 0.4}{0.45} = 0.311
\end{aligned}
$$

Ejercicio 25

Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diésel. Sabemos que el $60\,\%$ de los modelos son del tipo A y el $30\,\%$ del tipo B. El $30\,\%$ de los coches fabricados tienen motor diésel, el $30\,\%$ de los coches del modelo A son de tipo diésel y el $20\,\%$ de los coches del modelo B tienen motor diésel.
Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) El coche es del modelo C.

b) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diésel

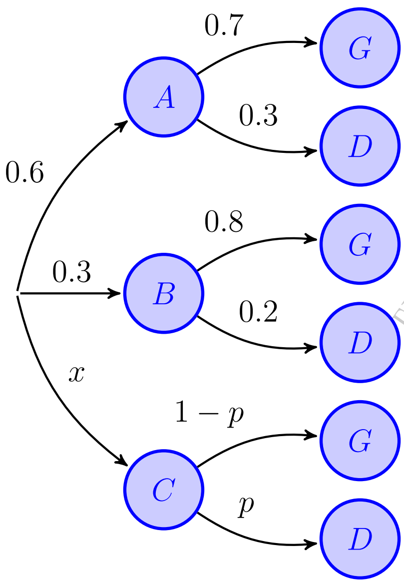
c) El coche tiene motor diésel, sabiendo que es del modelo C

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2001 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

A = "El coche es del modelo A" $\qquad$ B = "El coche es del modelo B"
C = "El coche es del modelo C" $\qquad$ G = "El coche tiene motor de gasolina"
D = "El coche tiene motor diésel"



a) $P(C) = 1-\big(P(A)+P(B)\big) = 1-(0.6+0.3) = 0.1$

b) $P(A \mid D) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A)\cdot P(D\mid A)}{P(D)}$
$= \dfrac{0.6\cdot 0.3}{0.3} = 0.6$

c) $P(D) = P\big((A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)\big)$
$= P(A\cap D) + P(B\cap D) + P(C\cap D)$
$= P(A)\cdot P(D\mid A) + P(B)\cdot P(D\mid B)$
$+ P(C)\cdot P(D\mid C)$
$= 0.6\cdot 0.3 + 0.3\cdot 0.2 + 0.1\cdot p = 0.3$
$\implies p = 0.6 \implies P(D\mid C) = 0.6$

Ejercicio 26

Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0.01 para A, de 0.02 para B y de 0.03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2001 - Opción B)

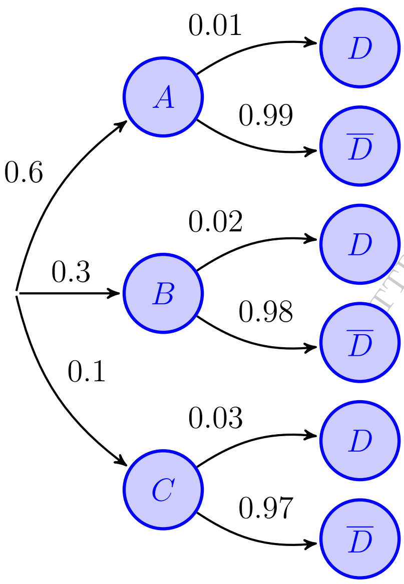
Solución.

Sean los sucesos

A = "El tornillos es de la fábrica A" $\quad$ B = "El tornillos es de la fábrica A"

C = "El tornillos es de la fábrica A" $\quad$ D = "El tornillo es defectuoso"

$$P(A) = \frac{}{1000} \qquad \& \qquad P(B) = \frac{300}{1000} = 0.3 \qquad \& \qquad P(C) = \frac{100}{1000} = 0.1$$



a) $$\begin{aligned} P(\overline{D}) &= P\big((A \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overline{D}) \cup (C \cap \overline{D})\big) \\ &= P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) + P(C \cap \overline{D}) \\ &= P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B) \\ &+ P(C) \cdot P(\overline{D} \mid C) \\ &= 0.6 \cdot 0.99 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.1 \cdot 0.97 = 0.985 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A \mid \overline{D}) &= \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A)}{P(\overline{D})} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.99}{0.985} = 0.603 \end{aligned}$$

Ejercicio 27

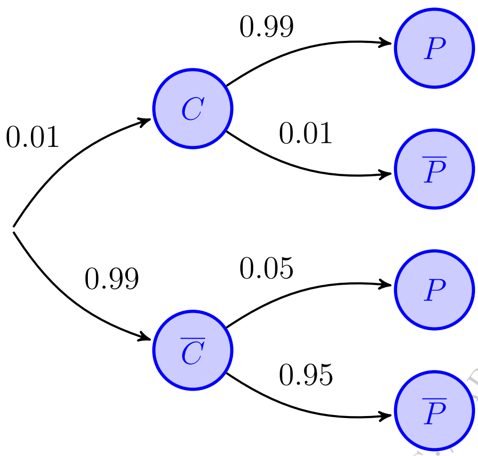
Una prueba para determinar cierta contaminación del agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0.05 *de falsos positivos, esto es, casos en los que el agua está libre de contaminación pero el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad* 0.99*. El agua está libre de contaminación con probabilidad* 0.99*. Si se realizara una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2002 - Opción B)
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2003 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$C = \text{“El agua está contaminada”}$$
$$P = \text{“El test es positivo en contaminación”}$$



$$P(\overline{C} \mid P) = \frac{P(\overline{C} \cap P)}{P(P)} = \frac{P(\overline{C}) \cdot P(P \mid \overline{C})}{P(P)}$$
$$\overset{\circledast}{=} \frac{0.99 \cdot 0.05}{0.0594} = 0.8333$$

$$\circledast\ P(P) = P\big((C \cap P) \cup (\overline{C} \cap P)\big)$$
$$= P(C \cap P) + P(\overline{C} \cap P)$$
$$= P(C) \cdot P(P \mid C) + P(\overline{C}) \cdot P(P \mid \overline{C})$$
$$= 0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.05 = 0.0594$$

Ejercicio 28

Se tiene tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera, 4 blancas y 3 negras.

a) Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

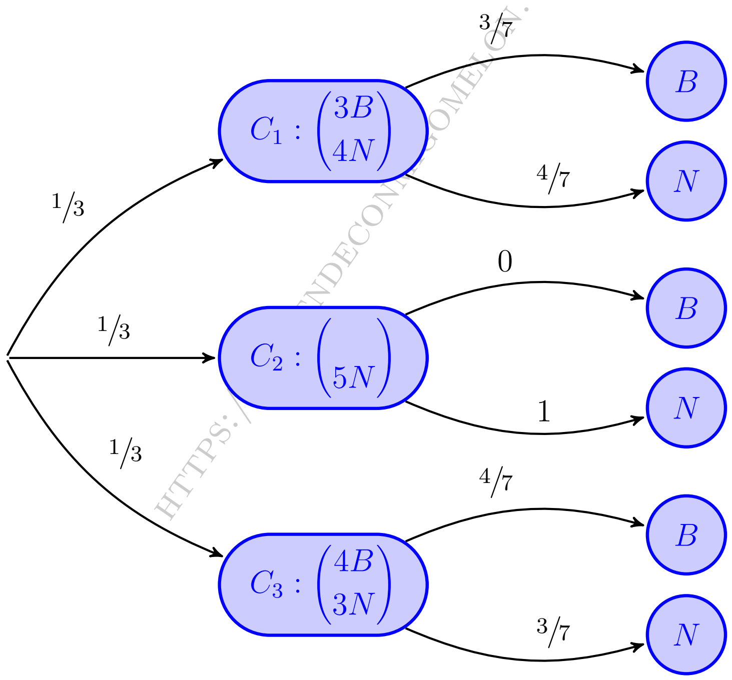
b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2002 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$C_i \equiv \text{“La bola extraída es de la caja i”}$$
$$B \equiv \text{“La bola extarída es blanca”}$$
$$N \equiv \text{“La bola extraída es negra”}$$



a) $P(N) = P\big((C_1 \cap N) \cup (C_2 \cap N) \cup (C_3 \cap N)\big) = P(C_1 \cap N) + P(C_2 \cap N) + P(C_3 \cap N)$

$$= P(C_1) \cdot P(N \mid C_1) + P(C_2) \cdot P(N \mid C_2) + P(C_3) \cdot P(N \mid C_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$$

b) $P(C_2 \mid N) = \dfrac{P(C_2 \cap N)}{P(N)} = \dfrac{P(C_2) \cdot P(N \mid C_2)}{P(N)} = \dfrac{{}^1\!/_3 \cdot 1}{{}^2\!/_3} = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 29

Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las ventas pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?

b) Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

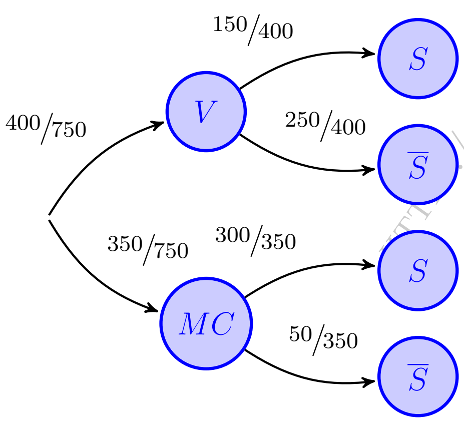
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2002 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$\begin{aligned} V &= \text{“La compra se ha pagado con la tarjeta } V\text{”} \\ MC &= \text{“La compra se ha pagado con la tarjeta } MC\text{”} \\ S &= \text{“La compra supera los 150 euros”} \end{aligned}$$

1ª Forma: Diagrama de árbol



$$\begin{aligned} \text{a)}\ P(S) &= P\big((V\cap S)\cup(MC\cap S)\big) \\ &= P(V\cap S)+P(MC\cap S) \\ &= P(V)\cdot P(S\mid V)+P(MC)\cdot P(S\mid MC) \\ &= \frac{400}{750}\cdot\frac{150}{400}+\frac{350}{750}\cdot\frac{300}{350}=\frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)}\ P(MC\mid \overline{S}) &= \frac{P(MC\cap\overline{S})}{P(\overline{S})} \\ &= \frac{P(MC)\cdot P(\overline{S}\mid MC)}{1-P(S)} \\ &= \frac{{}^{350}\!/_{750}\cdot{}^{50}\!/_{350}}{1-{}^{3}\!/_{5}}={}^{1}\!/_{6} \end{aligned}$$

2ª Forma: Tabla de Contingencia

	V	MC	Total
S	150	300	450
$\overline{S}$	250	50	300
Total	400	350	750

a) $P(S)=\dfrac{450}{750}=\dfrac{3}{5}$

b) $P(MC\mid\overline{S})=\dfrac{50}{300}=\dfrac{1}{6}$

Ejercicio 30

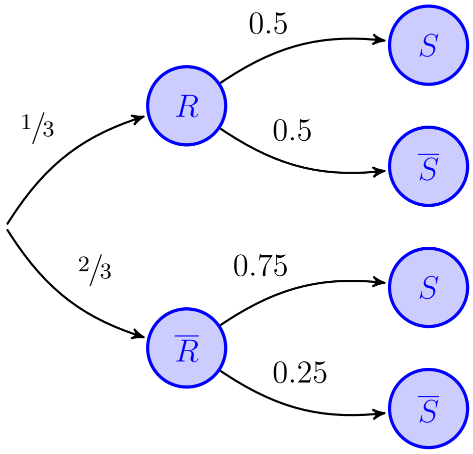
Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0.25. *La probabilidad de no regar el rosal es* $^2/_3$. *Si el rosal se ha secado, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2003 - Opción A)
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2004 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$R = \text{“El rosal es regado”}$$
$$S = \text{“El rosal se seca”}$$



$$P(\overline{R} \mid S) = \frac{P(\overline{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{P(\overline{R}) \cdot P(S \mid \overline{R})}{P(S)}$$
$$\overset{\circledast}{=} \frac{^2/_3 \cdot 0.75}{^2/_3} = \frac{3}{4}$$

$$\circledast\ P(S) = P\big((R \cap S) \cup (\overline{R} \cap S)\big)$$
$$= P(R \cap S) + P(\overline{R} \cap S)$$
$$= P(R) \cdot P(S \mid R) + P(\overline{R}) \cdot P(S \mid \overline{R})$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 0.5 + \frac{2}{3} \cdot 0.75 = \frac{2}{3}$$

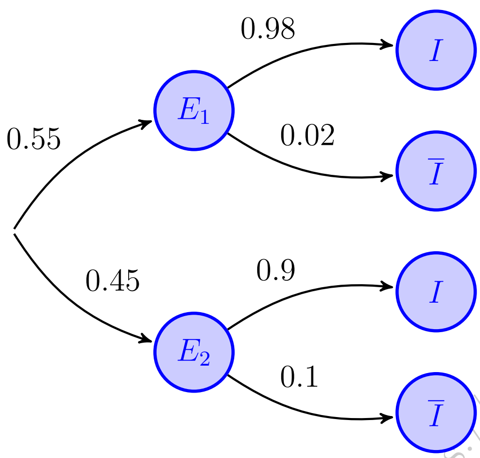
Ejercicio 31

> *Dos expertos, E_1 y E_2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es 0.55 y por E_2 es 0.45. Si una peritación ha sido realizada por E_1, la probabilidad de que dé lugar a indemnización es 0.98 y si ha sido realizada por E_2, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0.90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2004 - Opción A)*

Solución.

Sean los sucesos

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \text{“La peritación ha sido realizada por } E_1\text{”}\\
E_2 &= \text{“La peritación ha sido realizada por } E_2\text{”}\\
I &= \text{“La peritación ha dado lugar a indemnización”}
\end{aligned}
$$



$$
P(E_2 \mid I) = \frac{P(E_2 \cap I)}{P(I)} = \frac{P(E_2)\cdot P(I \mid E_2)}{P(I)} \overset{\circledast}{=} \frac{0.45\cdot 0.9}{0.944} = 0.429
$$

$$
\begin{aligned}
\circledast\ P(I) &= P\big((E_1 \cap I) \cup (E_2 \cap I)\big)\\
&= P(E_1 \cap I) + P(E_2 \cap I)\\
&= P(E_1)\cdot P(I \mid E_1) + P(E_2)\cdot P(I \mid E_2)\\
&= 0.55\cdot 0.98 + 0.45 \cdot 0.9 = 0.944
\end{aligned}
$$

Ejercicio 32

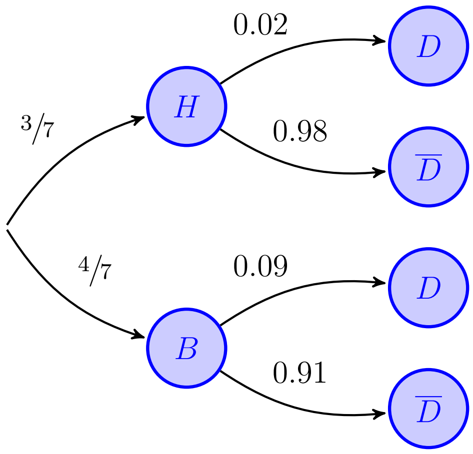
En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0.02 *y de que una de bajo consumo sea defectuosa es* 0.09*. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2004 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$
\begin{aligned}
H &= \text{“La bombilla es halógena”}\\
B &= \text{“La bombilla es de bajo consumo”}\\
D &= \text{“La bombilla es defectuosa”}
\end{aligned}
$$



$$P(H \mid \overline{D}) = \frac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(H) \cdot P(\overline{D} \mid H)}{P(\overline{D})}$$

$$\overset{\circledast}{=} \frac{3/7 \cdot 0.98}{0.94} = 0.4468$$

$$
\begin{aligned}
\circledast \; P(\overline{D}) &= P\big((H \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overline{D})\big)\\
&= P(H \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D})\\
&= P(H) \cdot P(\overline{D} \mid H) + P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B)\\
&= \frac{3}{7} \cdot 0.98 + \frac{4}{7} \cdot 0.91 = 0.94
\end{aligned}
$$

Ejercicio 33

En una población, el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. En esa población el 80 % de los hombres y el 20 % de las mujeres son aficionados al fútbol.

a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol.

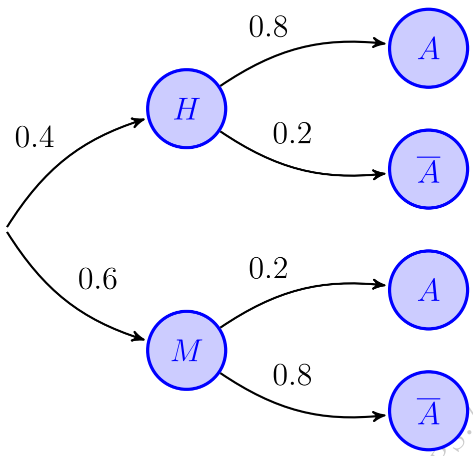
b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2004 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$H = \text{“La persona es hombre”}$$
$$M = \text{“La persona es mujer”}$$
$$A = \text{“La persona es aficionada al fútbol”}$$



a)
$$\begin{aligned} P(A) &= P\big((H\cap A)\cup(M\cap A)\big) \\ &= P(H\cap A)+P(M\cap A) \\ &= P(H)\cdot P(A\mid H)+P(M)\cdot P(A\mid M) \\ &= 0.4\cdot 0.8+0.6\cdot 0.2 = 0.44 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(M\mid A) &= \frac{P(M\cap A)}{P(A)} = \frac{P(M)\cdot P(A\mid M)}{P(A)} \\ &= \frac{0.6\cdot 0.2}{0.44} = 0.273 \end{aligned}$$

Ejercicio 34

En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía internet. De los inversores que realizan operaciones vía internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan inversiones vía internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:

a) Obtener la probabilidad de que un inversor elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.

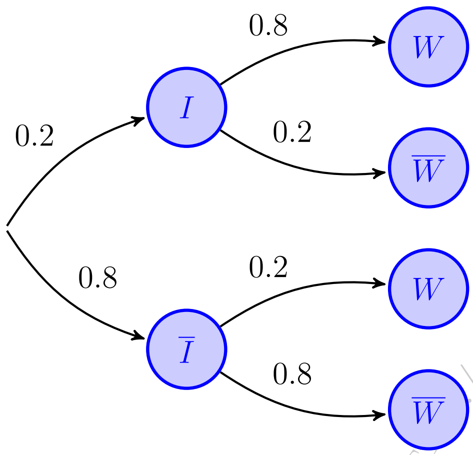
b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por internet?.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2005 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$I = \text{“El inversor realiza operaciones por internet”}$$
$$W = \text{“El inversor consulta InfoBolsaWeb”}$$



a) $P(W) = P\big((I \cap W) \cup (\overline{I} \cap W)\big)$
$$= P(I \cap W) + P(\overline{I} \cap W)$$
$$= P(I) \cdot P(W \mid I) + P(\overline{I}) \cdot P(W \mid \overline{I})$$
$$= 0.2 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.2 = 0.32$$

b) $P(I \mid W) = \dfrac{P(I \cap W)}{P(W)} = \dfrac{P(I) \cdot P(W \mid I)}{P(W)}$
$$= \frac{0.2 \cdot 0.8}{0.32} = 0.5$$

Ejercicio 35

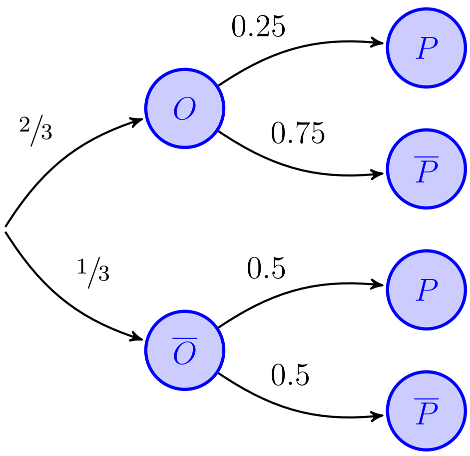
Una persona cuida de su jardín, pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es $2/3$. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se riega es de 0.25.
Si el jardín se ha estropeado ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2006 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$O \equiv \text{“La persona olvida regar el jardín”}$$
$$P \equiv \text{“El jardín progresa”}$$



$$P(O \mid \overline{P}) = \frac{P(O \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{P(O) \cdot P(\overline{P} \mid O)}{P(\overline{P})}$$
$$\overset{\circledast}{=} \frac{2/3 \cdot 0.75}{2/3} = \frac{3}{4}$$

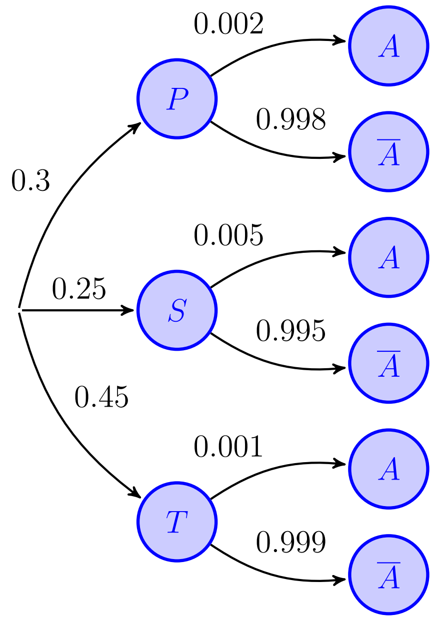
$$\circledast \; P(\overline{P}) = P\big((O \cap \overline{P}) \cup (\overline{O} \cap \overline{P})\big)$$
$$= P(O \cap \overline{P}) + P(\overline{O} \cap \overline{P})$$
$$= P(O) \cdot P(\overline{P} \mid O) + P(\overline{O}) \cdot P(\overline{P} \mid \overline{O})$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 0.75 + \frac{1}{3} \cdot 0.5 = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 36

Los tigres de cierto país proceden de tres reservas el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0.2 %, mientras que dicha proporción es 0.5 % en la segunda, y 0.1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2006 - Opción A)

Solución.



Sean los sucesos

$P =$ "El tigre es de la primera reserva"
$S =$ "El tigre es de la segunda reserva"
$T =$ "El tigre es de la tercera reserva"
$A =$ "El tigre es albino"

$$\begin{aligned} P(A) &= P\big((P \cap A) \cup (S \cap A) \cup P(T \cap A)\big) \\ &= P(P \cap A) + P(S \cap A) + P(T \cap A) \\ &= P(P) \cdot P(A \mid P) + P(S) \cdot P(A \mid S) \\ &+ P(T) \cdot P(A \mid T) = 0.3 \cdot 0.002 \\ &+ 0.25 \cdot 0.005 + 0.45 \cdot 0.001 = 0.0023 \end{aligned}$$

Ejercicio 37

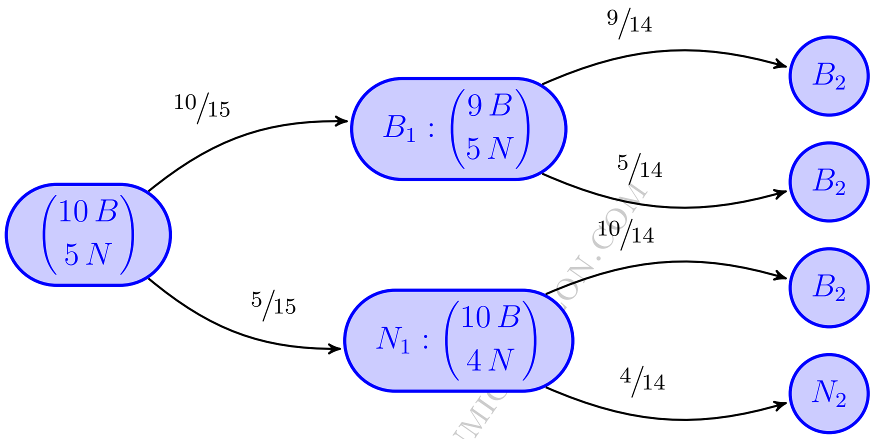
Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2006 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$B_i = \text{“Sacar bola blanca en la extracción } i\text{”}$$
$$N_i = \text{“Sacar bola negra en la extracción } i\text{”}$$



$$\begin{aligned} P\Big((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)\Big) &= P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) \\ &= P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1) \\ &= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{11}{21} = 0.5238 \end{aligned}$$

Ejercicio 38

Los pianistas de la isla sordina se forman en tres conservatorios C_1, C_2 y C_3, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.

a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.

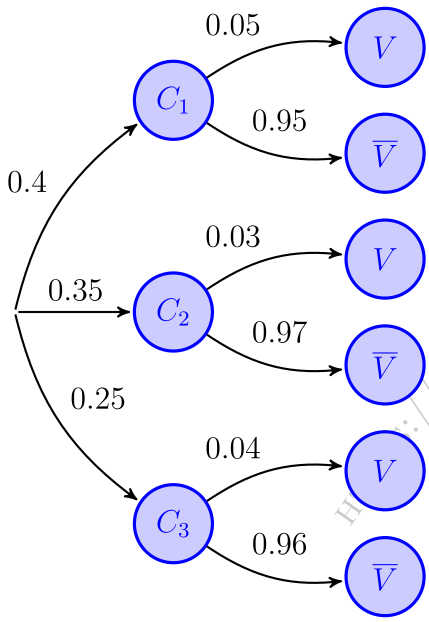
b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio C_1.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2007 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$C_i = \text{“El pianista es del conservatorio } i\text{”}$$
$$V = \text{“El pianista es virtuoso”}$$



a) $P(V) = P\big((C_1 \cap V) \cup (C_2 \cap V) \cup P(C_3 \cap C_1)\big)$
$= P(C_1 \cap V) + P(C_2 \cap V) + P(C_3 \cap V)$
$= P(C_1) \cdot P(V \mid C_1) + P(C_2) \cdot P(V \mid C_2)$
$+ P(C_3) \cdot P(V \mid C_3) = 0.4 \cdot 0.05$
$+ 0.35 \cdot 0.03 + 0.25 \cdot 0.04 = 0.0405$

b) $$P(C_1 \mid V) = \frac{P(C_1 \cap V)}{P(V)} = \frac{P(C_1) \cdot P(V \mid C_1)}{P(V)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.0405} = 0.4938$$

Ejercicio 39

En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0.01 para la marca A; 0.02 pra la marca B y 0.03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.

b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?.

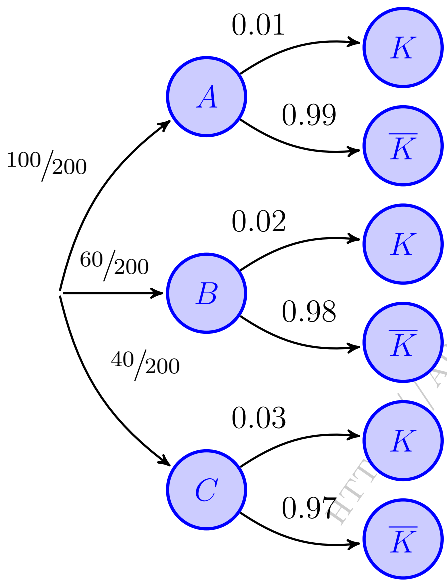
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2007 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

A = "El yogur es de la marca A" B = "El yogur es de la marca B"

C = "El yogur es de la marca C" K = "El yogur está caducado"



a) $$P(K) = P\Big((A \cap K) \cup (B \cap K) \cup P(C \cap K)\Big) = P(A \cap K) + P(B \cap K) + P(C \cap K) = P(A) \cdot P(K \mid A) + P(B) \cdot P(K \mid B) + P(C) \cdot P(K \mid C) = \frac{100}{200} \cdot 0.01 + \frac{60}{200} \cdot 0.02 + \frac{40}{200} \cdot 0.03 = 0.017$$

b) $$P(B \mid K) = \frac{P(B \cap K)}{P(K)} = \frac{P(B) \cdot P(K \mid B)}{P(K)} = \frac{{}^{60}\!/\!_{200} \cdot 0.02}{0.017} = 0.3529$$

Ejercicio 40

Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto *y* raya *y que el telégrafo envía un* punto *con probabilidad* $^3/_7$ *y una* raya *con probabilidad* $^4/_7$*. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un* punto *se reciba una* raya *con probabilidad* $^1/_4$ *y que cuando se envíe una* raya *se reciba un* punto *con probabilidad* $^1/_3$*.*

a) Si se recibe una raya*, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una* raya*?*

b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe punto-punto *se hubiera enviado* raya-raya*?*

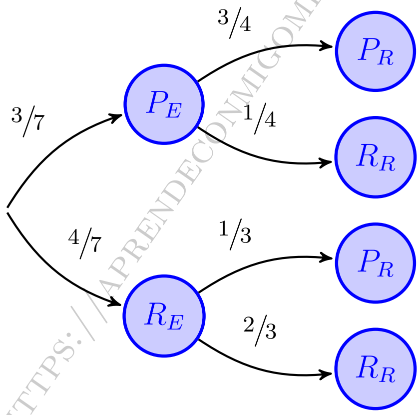
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2008 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$P_E \equiv$ "Se envía un punto" $\qquad R_E \equiv$ "Se envía una raya"

$P_R \equiv$ "Se recibe un punto" $\qquad R_R \equiv$ "Se recibe una raya"



a) $P(R_E \mid R_R) = \dfrac{P(R_E \cap R_R)}{P(R_R)} = \dfrac{P(R_E) \cdot P(R_R \mid R_E)}{P(R_R)} \overset{\circledast}{=} \dfrac{^4/_7 \cdot {^2/_3}}{0.4881} = 0.7805$

$\circledast$ $P(R_R) = P\Big((P_E \cap R_R) \cup (R_E \cap R_R)\Big) = P(P_E \cap R_R) + P(R_E \cap R_R)$

$= P(P_E) \cdot P(R_R \mid P_E) + P(R_E) \cdot P(R_R \mid R_E) = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{2}{3} = 0.4881$

b) $P(R_E R_E \mid P_R P_R) = P(R_E \mid P_R) \cdot P(R_E \mid P_R) \overset{\odot}{=} 0.3721 \cdot 0.3721 = 0.1385$

$\odot$ $P(R_E \mid P_R) = \dfrac{P(R_E \cap P_R)}{P(P_R)} = \dfrac{P(R_E) \cdot P(P_R \mid R_E)}{1 - P(R_R)} = \dfrac{^4/_7 \cdot {^1/_3}}{1 - 0.4881} = 0.3721$

Ejercicio 41

La probabilidad de que un vehículo de una cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a 0.2. *Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a* 0.85. *Por otra parte, la probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de una grúa sin haber tenido un accidente es igual a* 0.1.

a) Se elige al azar un vehículo de dicha compañía, ¿cuál es la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa?

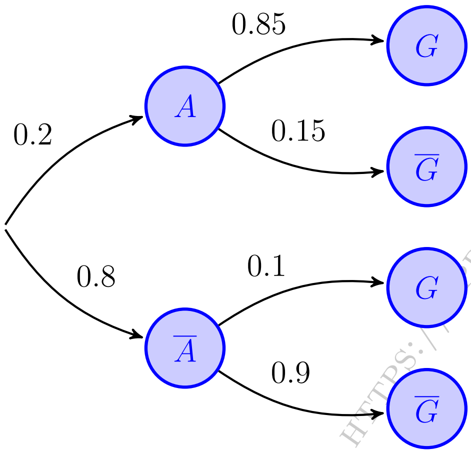
b) Si el vehículo elegido ha necesitado la asistencia de una grúa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido por causa de un accidente?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2009 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El vehículo sufre un accidente”}$$
$$G \equiv \text{“El vehículo necesita la asistencia de una grúa”}$$



a) $P(G) = P\big((A\cap G)\cup(\overline{A}\cap G)\big)$
$= P(A\cap G) + P(\overline{A}\cap G)$
$= P(A)\cdot P(G \mid A) + P(\overline{A})\cdot P(G \mid \overline{A}))$
$= 0.2\cdot 0.8 + 0.85\cdot 0.1 = 0.245$

b) $P(\overline{A} \mid G) = \dfrac{P(\overline{A}\cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(\overline{A})\cdot P(G \mid \overline{A})}{P(G)}$
$= \dfrac{0.8\cdot 0.1}{0.245} = 0.3265$

Ejercicio 42

Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 *bombillas blancas,* 120 *bombillas azules y* 80 *bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a* 0.01 *si la bombilla es blanca, es igual a* 0.02 *si la bombilla es azul e igual a* 0.03 *si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.*

a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona calcule la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

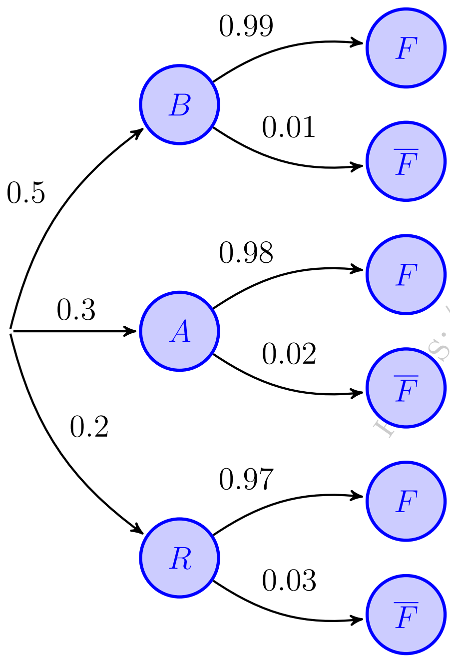
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2009 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$B \equiv$ “La bombilla elegida es blanca $\quad$ $A \equiv$ “La bombilla elegida es azul

$R \equiv$ “La bombilla elegida es roja $\quad$ $F \equiv$ “La bombilla funciona



$$P(B) = \frac{200}{200+120+80} = \frac{200}{400} = 0.5$$

$$P(A) = \frac{120}{400} = 0.3 \quad \& \quad P(R) = \frac{80}{400} = 0.2$$

a) $$\begin{aligned} P(\overline{F}) &= P\big((B\cap\overline{F})\cup(A\cap\overline{F})\cup(R\cap\overline{F})\big) \\ &= P(B\cap\overline{F}) + P(A\cap\overline{F}) + P(R\cap\overline{F}) \\ &= P(B)\cdot P(\overline{F} \mid B) + P(A)\cdot P(\overline{F} \mid A) \\ &+ P(R)\cdot P(\overline{F} \mid R) = 0.5\cdot 0.01 \\ &+ 0.3\cdot 0.02 + 0.2\cdot 0.03 = 0.017 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A \mid \overline{F}) &= \frac{P(A\cap\overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(A)\cdot P(\overline{F} \mid A)}{P(\overline{F})} \\ &= \frac{0.3\cdot 0.02}{0.017} = 0.3529 \end{aligned}$$

Ejercicio 43

En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %.

a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

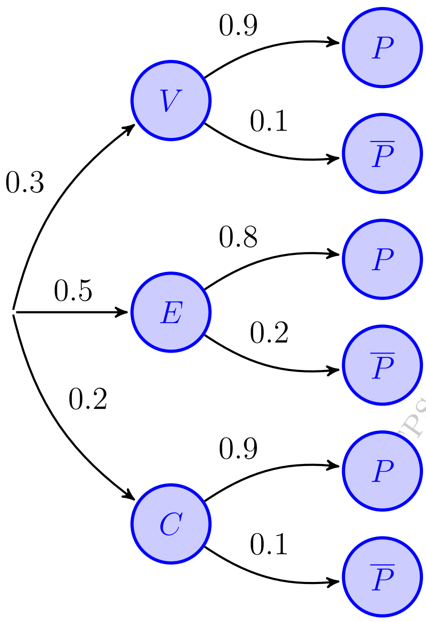
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo sabiendo que se ha pagado?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2009 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$V \equiv$ "El crédito está destinado a vivienda" $E \equiv$ "El crédito está destinado a empresas"
$C \equiv$ "El crédito está destinado a consumo" $P \equiv$ "El crédito resulta pagado"



a) $P(P) = P\big((V \cap P) \cup (E \cap P) \cup (C \cap P)\big)$
$= P(V \cap P) + P(E \cap P) + P(C \cap P)$
$= P(V) \cdot P(P \mid V) + P(E) \cdot P(P \mid E)$
$+ P(C) \cdot P(P \mid C) = 0.3 \cdot 0.9$
$+ 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.9 = 0.85$

b) $$P(C \mid P) = \frac{P(C \cap P)}{P(P)} = \frac{P(C) \cdot P(P \mid C)}{P(P)} = \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.85} = 0.212$$

Ejercicio 44

Se consideran los siguientes sucesos:

- *Suceso A: La economía de un cierto país está en recesión.*
- *Suceso B: Un indicicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión.*

Se sabe que:

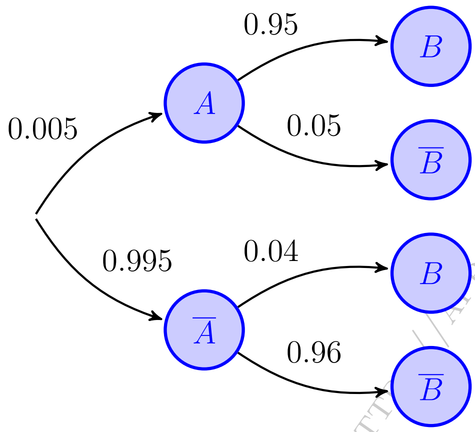
$$P(A) = 0.005 \qquad \& \qquad P(B \mid A) = 0.95 \qquad \& \qquad P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0.96$$

a) *Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.*

b) *Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2010 - Opción B)

Solución.



a) $P(\overline{B} \cap A) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B} \mid A)$

$$= 0.005 \cdot 0.05 = 0.00025$$

b) $P(B) = P\big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\big)$

$$= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})$$

$$= 0.005 \cdot 0.95 + 0.995 \cdot 0.04$$

$$= 0.00475 + 0.0398 = 0.04455$$

Ejercicio 45

En una residencia universitaria viven 183 estudiantes de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos, 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante de la residencia al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería?

b) Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2010 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$L \equiv$ "El estudiante usa la lavandería" $\qquad B \equiv$ "El estudiante usa la biblioteca"

1ª Forma: Tabla de Contingencia

Resolveremos el ejercicio mediante una tabla de contingencia en donde pondremos los datos y completaremos el resto (en azul).

	B	$\overline{B}$	**Total**
L	70	20	90
$\overline{L}$	60	33	93
Total	130	53	183

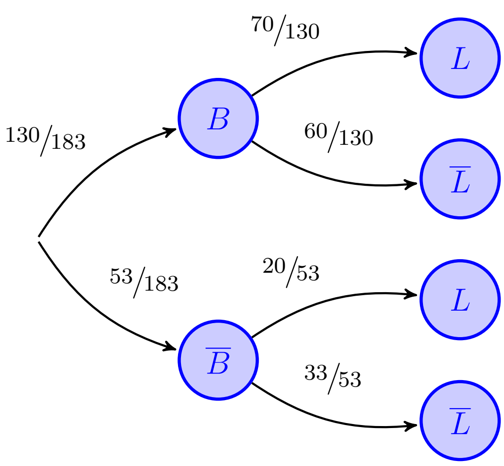
a) $P(L) = \dfrac{90}{183} = 0.4918$

b) $P(B \mid \overline{L}) = \dfrac{60}{93} = 0.6452$

2ª Forma: Diagrama de Árbol

$$P(B) = \frac{130}{183} \quad \& \quad P(B \cap L) = P(B) \cdot P(L \mid B) \Rightarrow P(L \mid B) = \frac{P(B \cap L)}{P(B)} = \frac{70/183}{130/183} = \frac{70}{130}$$

$$P(\overline{B} \cap \overline{L}) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{L} \mid \overline{B}) \implies P(\overline{L} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{L})}{P(\overline{B})} = \frac{20/183}{53/183} = \frac{20}{53}$$



a)
$$\begin{aligned} P(L) &= P\Big((B \cap L) \cup (\overline{B} \cap L)\Big) \\ &= P(B \cap L) + P(\overline{B} \cap L) \\ &= P(B) \cdot P(L \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(L \mid \overline{B}) \\ &= \frac{130}{183} \cdot \frac{70}{130} + \frac{53}{183} \cdot \frac{20}{53} = 0.4918 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(B \mid \overline{L}) &= \frac{P(B \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{P(B) \cdot P(\overline{L} \mid B)}{1 - P(L)} \\ &= \frac{130/183 \cdot 60/130}{1 - 0.4918} = 0.6451 \end{aligned}$$

Ejercicio 46

En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0.2*. Entre los habitantes que siguen una dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a* 0.6*. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a* 0.3*. Se elige al azar un habitante de la población.*

a) Calcúlese la probabilidad de que practique deporte regularmente.

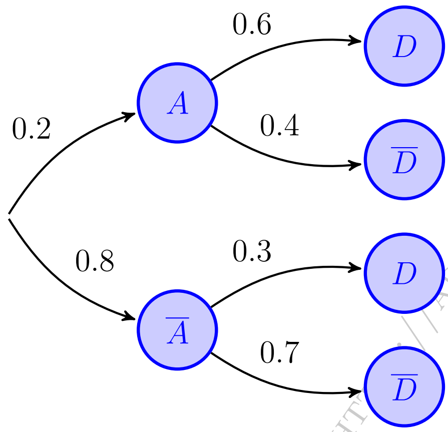
b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2011 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El habitante sigue una dieta de adelgazamiento”}$$
$$D \equiv \text{“El habitante practica deporte regularmente”}$$



$$\text{a)}\ P(D) = P\big((A \cap D) \cup (\overline{A} \cap D)\big)$$
$$= P(A \cap D) + P(\overline{A} \cap D)$$
$$= P(A) \cdot P(D \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(D \mid \overline{A})$$
$$= 0.2 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.4 = 0.36$$

$$\text{b)}\ P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)}$$
$$= \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.36} = 0.333$$

Ejercicio 47

En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0.5*, de que sea un camión es* 0.3 *y de que sea una motocicleta es* 0.2*. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es* 0.06 *para un coche,* 0.02 *para un camión y* 0.12 *para una motocicleta. En un momento dado, un vehículo pasa por el radar.*

a) Calcúlese la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.

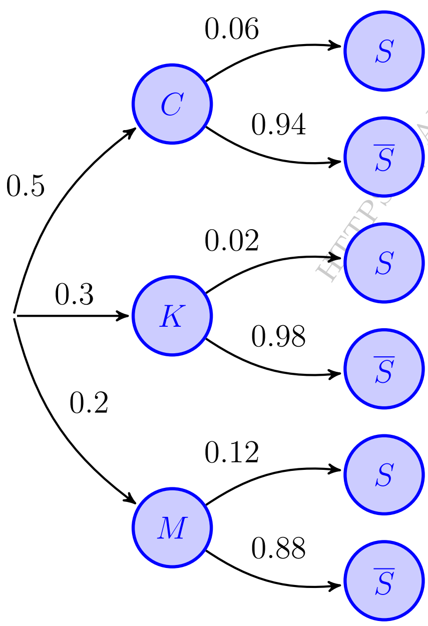
b) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cual es la probabilidad de qu se trate de una motocicleta?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2011 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$$\begin{aligned} C &= \text{“El vehículo que pasa por el radar es un coche”} \\ K &= \text{“El vehículo que pasa por el radar es un camión”} \\ M &= \text{“El vehículo que pasa por el radar es un motocicleta”} \\ S &= \text{“El vehículo supera la velocidad máxima permitida”} \end{aligned}$$



a) $$\begin{aligned} P(S) &= P\Big((C\cap S)\cup(K\cap S)\cup P(M\cap S)\Big) \\ &= P(C\cap S)+P(K\cap S)+P(M\cap S) \\ &= P(C)\cdot P(S\mid C)+P(K)\cdot P(S\mid K) \\ &+P(M)\cdot P(S\mid M) = 0.5\cdot 0.06 \\ &+0.3\cdot 0.02+0.2\cdot 0.12 = 0.06 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(M\mid S) &= \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{P(M)\cdot P(S\mid M)}{P(S)} \\ &= \frac{0.2\cdot 0.12}{0.06} = 0.4 \end{aligned}$$

Ejercicio 48

Se dispone de tres urnas, A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

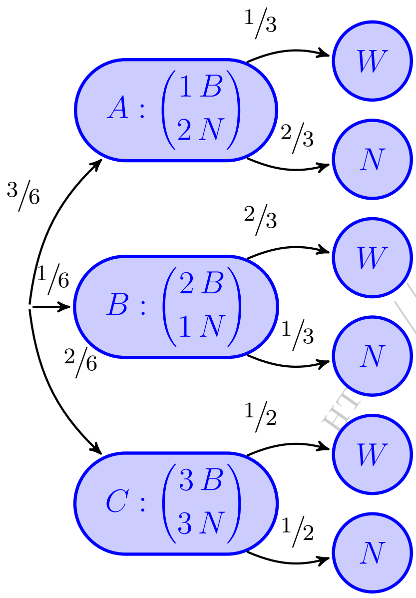
b) Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de qe la bola haya sido extraída de la urna C?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2011 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$A =$ "Sale 1, 2 o 3 en el dado" $\quad B =$ "Sale 4 en el dado"
$C =$ "Sale 5 en el dado" $\quad W =$ "La bola extraida es blanca"
$N =$ "La bola extraida es negra"



a) $$\begin{aligned} P(W) &= P\big((A\cap W)\cup(B\cap W)\cup P(C\cap W)\big) \\ &= P(A\cap W)+P(B\cap W)+P(C\cap W) \\ &= P(A)\cdot P(W\mid A)+P(B)\cdot P(W\mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(W\mid C) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{3} \\ &+ \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{9} = 0.444 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(C\mid W) &= \frac{P(C\cap W)}{P(W)} = \frac{P(C)\cdot P(W\mid C)}{P(W)} \\ &= \frac{3/6\cdot 1/3}{4/9} = \frac{3}{8} = 0.375 \end{aligned}$$

Ejercicio 49

Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probababilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2012 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} U &\equiv \text{“La moneda elegida tiene cara y cruz”} \\ D &\equiv \text{“La moneda elegida tiene dos caras”} \\ C_i &\equiv \text{“Sacar cara en el lanzamiento } i\text{”} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap C_2) &= P\Big((U \cap C_1 \cap C_2) \cup (D \cap C_1 \cap C_2)\Big) \\ &= P(U \cap C_1 \cap C_2) + P(D \cap C_1 \cap C_2) \\ &= P(U) \cdot P\Big((C_1 \cap C_2) \mid U\Big) + P(D) \cdot P\Big((C_1 \cap C_2) \mid U\Big) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$P\Big(D \mid (C_1 \cap C_2)\Big) = \frac{P(D \cap C_1 \cap C_2)}{P(C_1 \cap C_2)} = \frac{P(D) \cdot P\Big((C_1 \cap C_2) \mid D\Big)}{P(C_1 \cap C_2)} = \frac{{}^1\!/_2 \cdot 1 \cdot 1}{{}^5\!/_8} = \frac{4}{5}$$

Ejercicio 50

En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de graddo se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

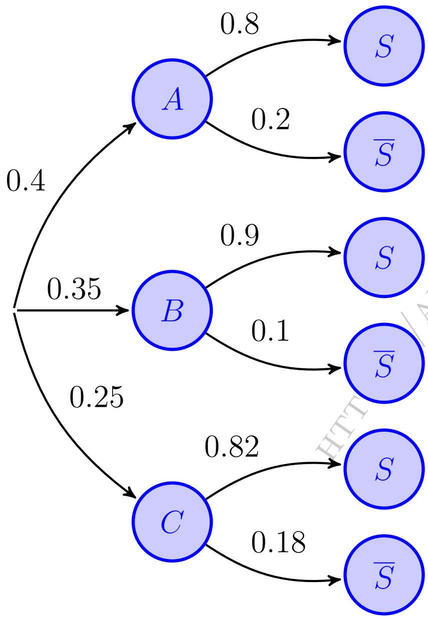
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2012 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$A =$ "El alumno es del colegio A" $\quad B =$ "El alumno es del colegio B"

$C =$ "El alumno es del colegio C" $\quad S =$ "El alumno ha superado la prueba"



$$P(A) = \frac{80}{80+70+50} = \frac{80}{200} = 0.4$$

$$P(B) = \frac{70}{200} = 0.35 \quad \& \quad P(C) = \frac{50}{200} = 0.25$$

a) $$\begin{aligned} P(S) &= P\Big((A\cap S)\cup(B\cap S)\cup P(C\cap S)\Big) \\ &= P(A\cap S)+P(B\cap S)+P(C\cap S) \\ &= P(A)\cdot P(S\mid A)+P(B)\cdot P(S\mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(S\mid C) = 0.4\cdot 0.8 \\ &+ 0.35\cdot 0.9+0.25\cdot 0.82 = 0.84 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(B\mid \overline{S}) &= \frac{P(B\cap\overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(B)\cdot P(\overline{S}\mid B)}{P(\overline{S})} \\ &= \frac{0.35\cdot 0.1}{1-0.84} = 0.2187 \end{aligned}$$

Ejercicio 51

Una ferretería tiene en su almacén bombillas de bajo consumo: 500 bombillas de 20 W, 300 de 15 W y 200 de 12 W. Los controles de calidad realizados por la empresa que fabrica las bombillas han permitido determinar las probabilidades de fallo de cada tipo de producto durante la primera hora de encendido, siendo de 0.03 para las bombillas de 20 W, de 0.02 para las de 15 W y de 0.01 para las bombillas de 12 W.

a) Se elige al azar una bombilla del almacén, ¿cuál es la probabilidad de que se produzca un fallo durante la primera hora de encendido?

b) Se somete al control de calidad una bombilla del almacén elegida al azar y falla en su primera hora de encendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bombilla de 20 W?

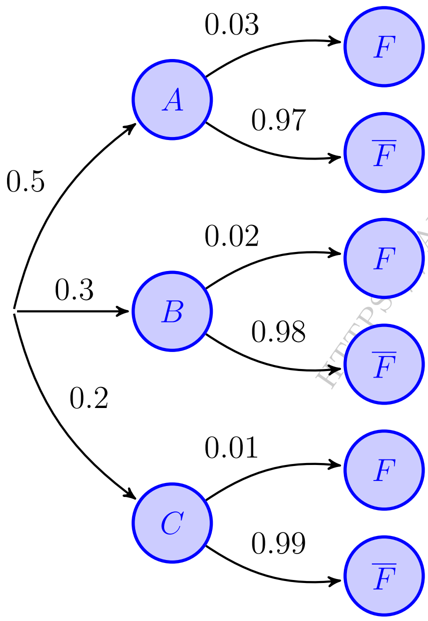
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2012 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

$A =$ "La bombilla es de 20 W" $\quad B =$ "La bombilla es de 15 W"

$C =$ "La bombilla es de 12 W" $\quad F =$ "La bombilla falla en la primera hora"



$$P(A) = \frac{80}{500+200+300} = \frac{500}{1000} = 0.5$$

$$P(B) = \frac{200}{1000} = 0.2 \quad \& \quad P(C) = \frac{300}{1000} = 0.3$$

a) $$\begin{aligned} P(F) &= P\Big((A\cap F)\cup(B\cap F)\cup P(C\cap F)\Big) \\ &= P(A\cap F)+P(B\cap F)+P(C\cap F) \\ &= P(A)\cdot P(F \mid A)+P(B)\cdot P(F \mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(F \mid C) = 0.5\cdot 0.03 \\ &+ 0.3\cdot 0.02 + 0.2\cdot 0.01 = 0.023 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A \mid F) &= \frac{P(A\cap F)}{P(F)} = \frac{P(A)\cdot P(F \mid A)}{P(F)} \\ &= \frac{0.5\cdot 0.03}{0.023} = 0.6522 \end{aligned}$$

Ejercicio 52

Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquuina A sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en B es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0.03. En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.

a) Calcúlese la probabilidad de que un tormillo elegido al azar no sea defectuoso.

b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en la máquina B?

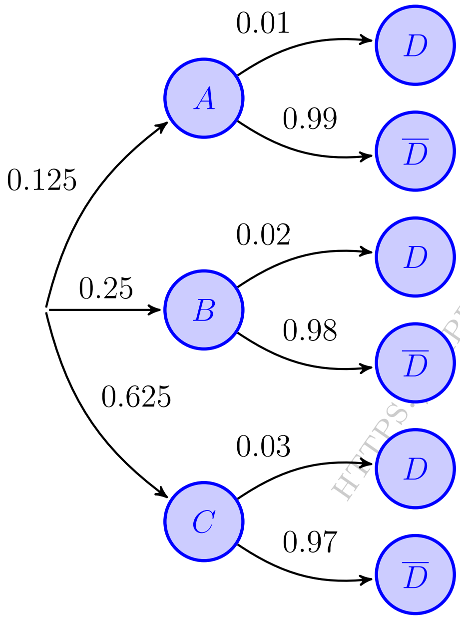
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2013 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

A = "El tornillo es de la máquina A" $\quad$ B = "El tornillo es de la máquina B"

C = "El tornillo es de la máquina C" $\quad$ D = "El tornillo es defectuoso"



$$P(A) = \frac{15}{120} = 0.125$$

$$P(B) = \frac{30}{120} = 0.25 \quad \& \quad P(C) = \frac{75}{120} = 0.625$$

a) $$P(\overline{D}) = P\Big((A \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overline{D}) \cup P(C \cap \overline{D})\Big)$$
$$= P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) + P(C \cap \overline{D})$$
$$= P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B)$$
$$+ P(C) \cdot P(\overline{D} \mid C) = 0.125 \cdot 0.99$$
$$+ 0.25 \cdot 0.98 + 0.625 \cdot 0.97 = 0.975$$

b) $$P(B \mid D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D \mid B)}{1 - P(\overline{D})}$$
$$= \frac{0.25 \cdot 0.02}{1 - 0.975} = 0.2$$

Ejercicio 53

Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

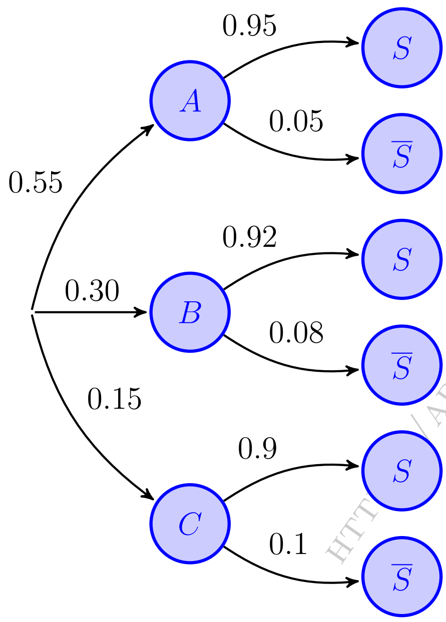
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2013 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos

$A =$ "El encargo se hace al sastre A" $\quad B =$ "El encargo se hace al sastre B"

$C =$ "El encargo se hace al sastre C" $\quad D =$ "El cliente está satisfecho"



a) $P(\overline{S}) = P\Big((A\cap\overline{S})\cup(B\cap\overline{S})\cup P(C\cap\overline{S})\Big)$

$$= P(A\cap\overline{S}) + P(B\cap\overline{S}) + P(C\cap\overline{S})$$
$$= P(A)\cdot P(\overline{S}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{S}\mid B)$$
$$+ P(C)\cdot P(\overline{S}\mid C) = 0.55\cdot 0.05$$
$$+ 0.3\cdot 0.08 + 0.15\cdot 0.1 = 0.0665$$

b) $P(A\mid\overline{S}) = \dfrac{P(A\cap\overline{S})}{P(\overline{S})} = \dfrac{P(A)\cdot P(\overline{S}\mid A)}{P(\overline{S})}$

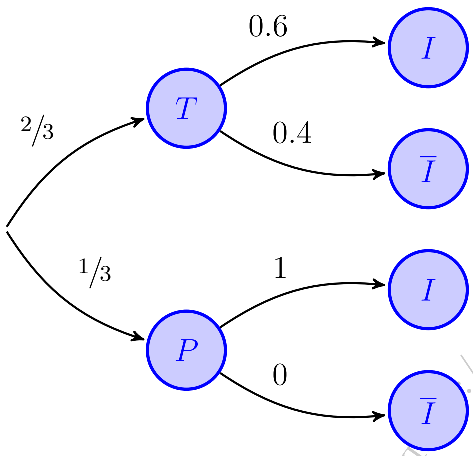
$$= \frac{0.55\cdot 0.05}{0.0665} = 0.4135$$

Ejercicio 54

> *En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.*
>
> *a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.*
>
> *b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2013 - Opción A)*

Solución. Sean los sucesos:

$$T \equiv \text{“El pasajero viaja en clase turista”}$$
$$P \equiv \text{“El pasajero viaja en clase preferente”}$$
$$I \equiv \text{“El pasajero habla inglés”}$$



a) $P(I) = P\big((T \cap I) \cup (P \cap I)\big)$
$$= P(T \cap I) + P(P \cap I)$$
$$= P(T) \cdot P(I \mid T) + P(P) \cdot P(I \mid P)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 0.6 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0.7333$$

b) $P(T \mid I) = \dfrac{P(T \cap I)}{P(I)} = \dfrac{P(T) \cdot P(I \mid T)}{P(I)}$
$$= \frac{2/3 \cdot 0.6}{0.7333} = 0.5454$$

Ejercicio 55

Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

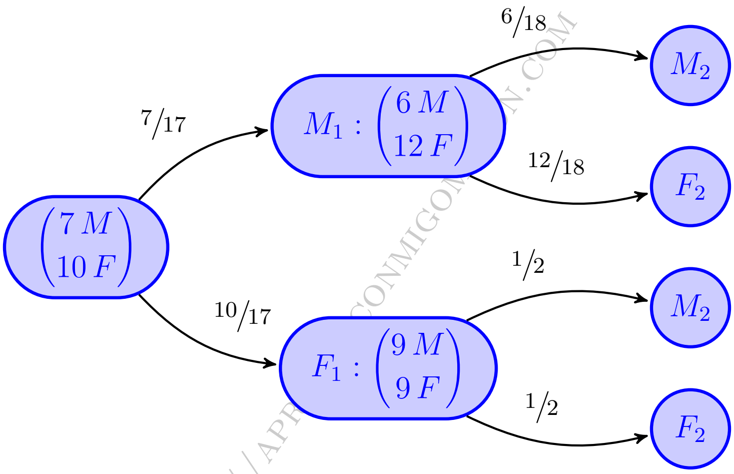
a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo sea del mismo sabor que el primero.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2013 - Opción B)

Solución. Sean los sucesos:

$$M_i \equiv \text{“El caramelo extraído en la posición } i \text{ es de menta”}$$
$$F_i \equiv \text{“El caramelo extraído en la posición } i \text{ es de fresa”}$$



a) $P(F_2) = P\big((M_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_2)\big) = P(M_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap F_2)$

$$= P(M_1) \cdot P(F_2 \mid M_1) + P(F_1) \cdot P(F_2 \mid F_1) = \frac{7}{17} \cdot \frac{12}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{29}{51} = 0.5686$$

b) $P(\text{Mismo sabor}) = P\big((M_1 \cap M_2) \cup (F_1 \cap F_2)\big) = P(M_1 \cap M_2) + P(F_1 \cap F_2)$

$$= P(M_1) \cdot P(M_2 \mid M_1) + P(F_1) \cdot P(F_2 \mid F_1) = \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{22}{51} = 0.4314$$

Ejercicio 56

En una determinada población, el 30 % de las personas que deciden iniciar una dieta de adelgazamiento utilizan algún tipo de supervisión médica mientras que el 40 % de todas las personas que inician una dieta de adelgazamiento continúan con ella al menos un mes. En esa población, el 80 % de las personas que inician la dieta sin supervisión abandona antes del primer mes.

a) Se escoge al azar a un individuo de esa población del que sabemos que ha iniciado una dieta. ¿Cuál es la probabilidad de que abandonara antes del primer mes y no hubiera tenido supervisión médica?

b) ¿Qué porcentaje de las personas que inician una dieta con supervisión médica abandona antes del primer mes?

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Modelo - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{“La dieta tiene supervisión médica”}$$
$$A \equiv \text{“El cliente abandona la dieta antes del primer mes”}$$

1ª Forma: Tabla de Contingencia

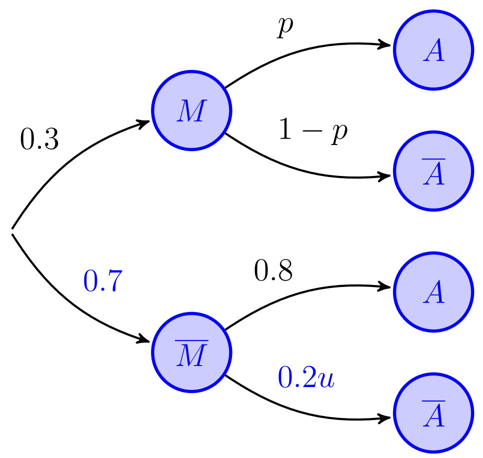
	M	$\overline{M}$	Total
A	0.56	0.56	0.6
$\overline{A}$	0.26	0.14	0.4
Total	0.3	0.7	1

a) $P(A \mid \overline{M}) = \dfrac{P(A\cap\overline{M})}{P(\overline{M})} \Rightarrow P(A\cap\overline{M}) = P(\overline{M})\cdot P(A \mid \overline{M})$

$\Longrightarrow P(A\cap\overline{M}) = 0.7\cdot 0.8 = 0.56$

b) $P(A \mid M) = \dfrac{P(A\cap M)}{P(M)} = \dfrac{0.04}{0.3} = 0.133$

2ª Forma: Diagrama de Arbol



a) $P(A\cap\overline{M}) = P(\overline{M}\cap A) = P(\overline{M})\cdot P(A \mid \overline{M})$
$= 0.7\cdot 0.8 = 0.56$

b) $P(\overline{A}) = P\big((M\cap\overline{A})\cup(\overline{M}\cap\overline{A})\big)$
$= P(M\cap\overline{A}) + P(\overline{M}\cap\overline{A})$
$= P(M)\cdot P(\overline{A}\mid M) + P(\overline{M})\cdot P(\overline{A}\mid\overline{M})$
$\Longrightarrow 0.4 = 0.3\cdot(1-p)+0.7\cdot 0.2 \Longrightarrow p = 0.133$
$\Longrightarrow P(A \mid M) = 0.133$

Ejercicio 57

Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

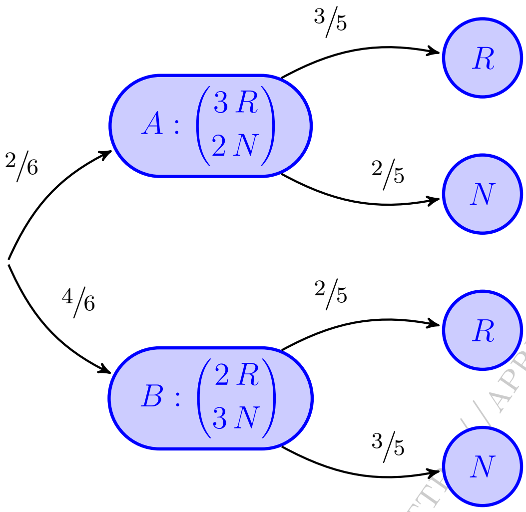
(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Junio - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "Sacar 1 ó 2 en el dado" $\qquad B \equiv$ "Sacar más de 2 en el dado"

$R \equiv$ "Extraer bola roja" $\qquad N \equiv$ "Extraer bola negra"



a) $$\begin{aligned} P(R) &= P\big((A\cap R)\cup(B\cap R)\big) \\ &= P(A\cap R)+P(B\cap R) \\ &= P(A)\cdot P(R\mid A)+P(B)\cdot P(R\mid B) \\ &= \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{7}{15} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A\mid R) &= \frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{P(A)\cdot P(R\mid A)}{P(R)} \\ &= \frac{{}^2\!/_6\cdot{}^3\!/_5}{{}^7\!/_{15}}=\frac{3}{7} \end{aligned}$$

Ejercicio 58

Al 80 % de los trabajadores en educación (E) que se jubilan, sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (FD), también al 60 % de los trabajadores de justicia (J) y al 30 % de los de sanidad (S). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) Calcúlese la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.

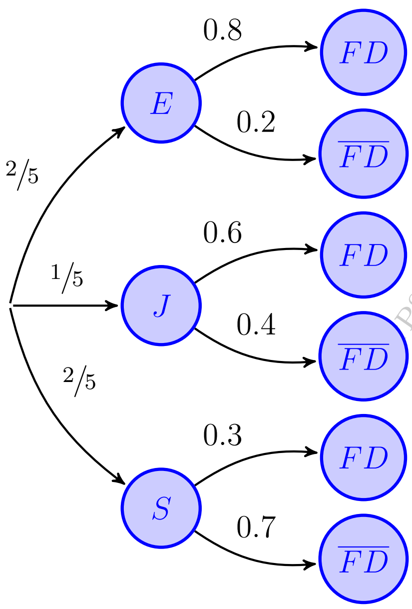
b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Septiembre - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$E \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Educación”}$$
$$J \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Justicia”}$$
$$S \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Sanidad”}$$
$$FD \equiv \text{“Al trabajador le hacen una fiesta de despedida”}$$



Sean: $P(J) = p \quad \& \quad P(E) = P(S) = 2p$

$$P(E) + P(S) + P(J) = 2p + 2p + p = 1 \implies p = 1/5$$

a)
$$\begin{aligned} P(FD) &= P\big((E\cap FD)\cup(J\cap FD)\cup(S\cap FD)\big) \\ &= P(E\cap FD)+P(J\cap FD)+P(S\cap FD) \\ &= P(E)\cdot P(FD \mid E)+P(J)\cdot P(FD \mid J) \\ &+ P(S)\cdot P(FD \mid S) = \frac{2}{5}\cdot 0.8 + \frac{1}{5}\cdot 0.6 \\ &+ \frac{2}{5}\cdot 0.3 = 0.56 \end{aligned}$$

b)
$$P(S \mid \overline{FD}) = \frac{P(S\cap \overline{FD})}{P(\overline{FD})} = \frac{P(S)\cdot P(\overline{FD} \mid S)}{1 - P(FD)} = \frac{2/5 \cdot 0.7}{1 - 0.56} = 0.6363$$

Ejercicio 59

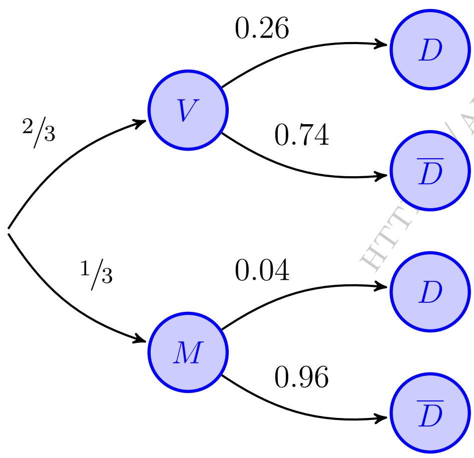
> *Se ha cometido un delito. La probabilidad de que lo haya cometido un varón es el doble de que lo haya cometido una mujer. Por otra parte, la probabilidad de que al examinar un área determinada de la huella dactilar de un varón se encuentren* 15 *crestas es* 0.26*, mientras que en una mujer es* 0.04*.*
>
> *a) Calcúlese la probabilidad de que una huella encontrada en la escena del delito tenga* 15 *crestas en el recuento de dicha área.*
>
> *b) Se ha encontrado en la escena del delito una huella dactilar con* 15 *crestas en esa área determinada. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha huella pertenezca a un varón?*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - 2014 Septiembre - Opción B - Coincidentes)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$V \equiv \text{“El delito ha sido cometido por un varón”}$$
$$M \equiv \text{“El delito ha sido cometido por una mujer”}$$
$$D \equiv \text{“La huella dactilar tiene 15 crestas”}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{P(V)=2P(M)}\\ \text{P(V)+P(M)=1}\end{array}\right\} \Longrightarrow 2P(M)+P(M)=1 \Longrightarrow \begin{cases}\text{P(M)=}{}^1\!/_3\\ P(V)={}^2\!/_3\end{cases}$$



a) $$\begin{aligned}P(D) &= P\big((V\cap D)\cup(M\cap D)\big)\\ &= P(V\cap D)+P(M\cap D)\\ &= P(V)\cdot P(D\mid V)+P(M)\cdot P(D\mid M)\\ &= \frac{2}{3}\cdot 0.26+\frac{1}{3}\cdot 0.04 = 0.1867\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}P(V\mid D) &= \frac{P(V\cap D)}{P(D)} = \frac{P(V)\cdot P(D\mid V)}{P(D)}\\ &= \frac{{}^2\!/_3\cdot 0.26}{0.1867} = 0.9284\end{aligned}$$

Ejercicio 60

Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 negras y otra urna contiene 3 bolas blancas y dos negras. Se toma al azar una bola de la primera urna y, sin mirarla, se introduce en la segunda urna. A continuación extraemos consecutivamente, con reemplazamiento, dos bolas de la segunda urna. Hállese la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean:

a) Del mismo color.

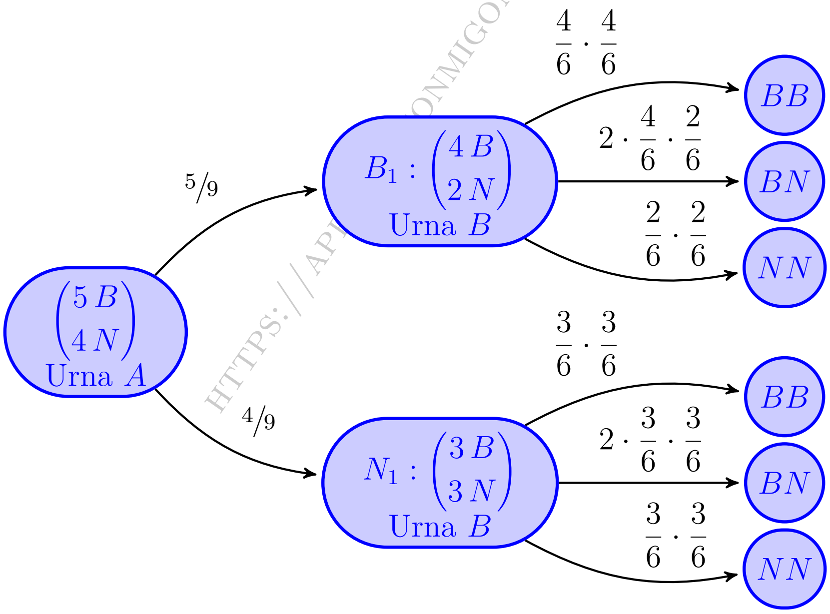
b) De distinto color.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Modelo - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned}
B_1 &\equiv \text{“Pasar una bola blanca de la Urna } A \text{ a la } B\text{”}\\
N_1 &\equiv \text{“Pasar una bola negra de la Urna } A \text{ a la } B\text{”}\\
BB &\equiv \text{“Extraer dos bolas blancas de la urna } B\text{”}\\
BN &\equiv \text{“Extraer una bola blanca y otra negra de la urna } B\text{”}\\
NN &\equiv \text{“Extraer dos bolas negras de la urna } B\text{”}
\end{aligned}$$



a) $P(\text{mismo color}) = P(BB \cup NN) = P(BB) + P(NN) = P\Big((B_1 \cap BB) \cup (N_1 \cap BB)\Big)$

$$+ P\Big((B_1 \cap NN) + P(N_1 \cap NN)\Big) = P(B_1 \cap BB) + P(N_1 \cap BB)$$
$$+ P(B_1 \cap NN) + P(N_1 \cap NN) = P(B_1) \cdot P(BB \mid B_1)$$
$$+ P(N_1) \cdot P(BB \mid N_1) + P(B_1) \cdot P(NN \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(NN \mid N_1)$$
$$= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{43}{81}$$

b) $P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \dfrac{43}{81} = \dfrac{38}{81}$

Ejercicio 61

En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas.
Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

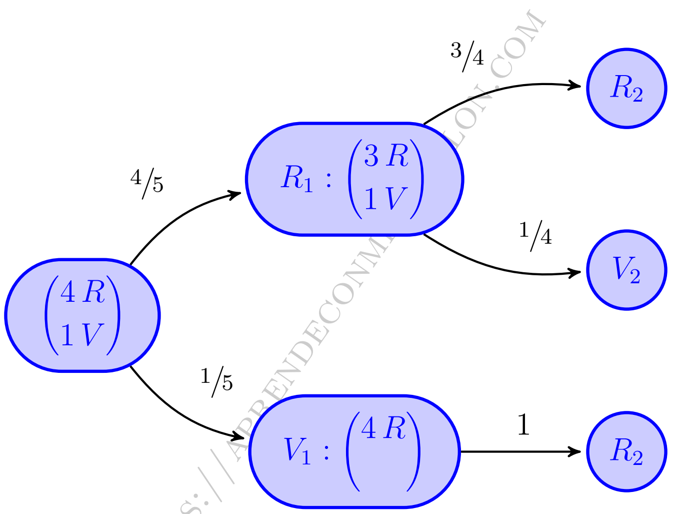
b) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$R_i \equiv \text{“Sacar bola } \textit{roja} \text{ en la extracción } i\text{”}$$
$$V_i \equiv \text{“Sacar bola } \textit{verde} \text{ en la extracción } i\text{”}$$



a) $P(\text{mismo color}) = P\Big((R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)\Big) = P(R_1 \cap R_2) + \cancelto{0}{P(V_1 \cap V_2)}$

$$= P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

b) $P(V_1 \mid R_2) = \dfrac{P(V_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)}{P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap R_2)}$

$$= \frac{P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)}{P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) + P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 1}{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 62

En cierto ensayo clínico, se trata al 60 % de pacientes afectados de hepatitis C con interferón, y al 40 % restante con ribavirina más interferón. Al cabo de ocho semanas se observa una respuesta favorable al tratamiento en el 43 % de los pacientes tratados únicamente con interferón y en el 71 % de los pacientes tratados con ribavirina más interferón. Se toma al azar un paciente del ensayo. Determínese la probabilidad de que:

a) Haya respondido favorablemente al tratamiento que está recibiendo.

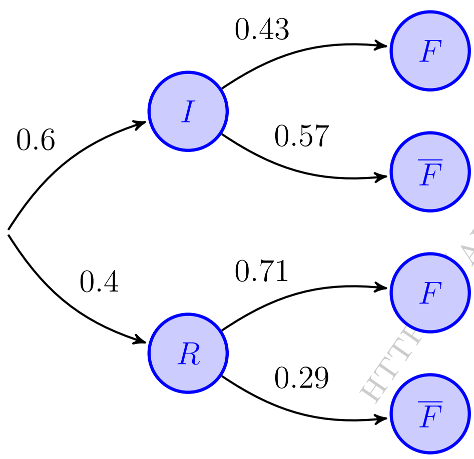
b) Si ha respondido favorablemente al tratamiento, haya sido tratado únicamente con interferón.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$I \equiv \text{“El paciente es tratado con interferón”}$$
$$R \equiv \text{“El paciente es tratado con ribavirina más interferón”}$$
$$F \equiv \text{“El tratameinto tiene resultados favorables”}$$



a) $P(F) = P\big((I\cap F)\cup(R\cap F)\big)$
$= P(I\cap F) + P(R\cap F)$
$= P(I)\cdot P(F \mid I) + P(R)\cdot P(F \mid R)$
$= 0.6\cdot 0.43 + 0.4\cdot 0.71 = 0.542$

b) $P(I \mid F) = \dfrac{P(I\cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(I)\cdot P(F\mid I)}{P(F)}$
$= \dfrac{0.6\cdot 0.43}{0.542} = 0.476$

Ejercicio 63

En una universidad de Madrid el 65 % del profesorado es funcionario. Por otro lado, el 60 % del profesorado son mujeres de las cuales el 70 % son funcionarias. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado tomado al azar:

a) Sea funcionario y hombre.

b) Sea mujer sabiendo que no es funcionario.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$F \equiv \text{“El miembro del profesorado es funcionario”}$$
$$M \equiv \text{“El miembro del profesorado es mujer”}$$

1ª Forma: Tabla de Contingencia

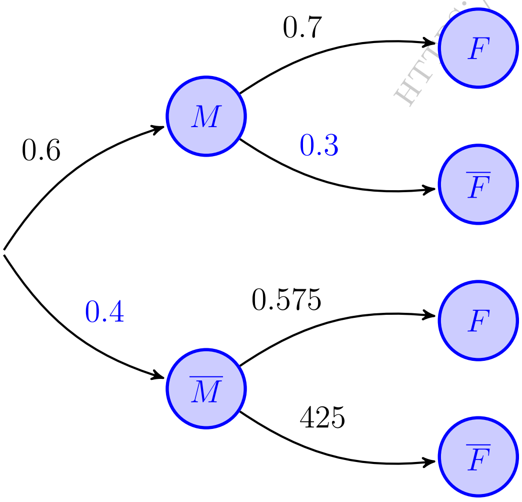
$$P(F \mid M) = \frac{P(F\cap M)}{P(M)} \implies P(F\cap M) = P(M)\cdot P(F\mid M) = 0.6\cdot 0.7 = 0.42$$

	F	$\overline{F}$	Total
M	0.42	0.18	0.6
$\overline{M}$	0.23	0.17	0.4
Total	0.65	0.35	1

a) $P(F\cap \overline{M}) = 0.23$

b) $P(M \mid \overline{F}) = \dfrac{P(M\cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{0.18}{0.35} = 0.514$

2ª Forma: Diagrama de Arbol



$$\begin{aligned} P(F) &= P\big((M\cap F)\cup(\overline{M}\cap F)\big)\\ &= P(M\cap F) + P(\overline{M}\cap F)\\ &= P(M)\cdot P(F\mid M) + P(\overline{M})\cdot P(F\mid \overline{M}) \end{aligned}$$
$$\implies 0.65 = 0.6\cdot 0.7 + 0.4\cdot P(F\mid \overline{M})$$
$$\implies P(F\mid \overline{M}) = 0.575$$

a) $P(F\cap \overline{M}) = P(\overline{M})\cdot P(F\mid \overline{M})$
$= 0.4\cdot 0.575 = 0.23$

b) $P(M\mid \overline{F}) = \dfrac{P(M\cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(M\cap \overline{F})}{1-P(F)}$
$= \dfrac{0.6\cdot 0.3}{1-0.7} = 0.514$

Ejercicio 64

En un polígono industrial se almacenan 30000 *latas de refresco procedentes de las fábricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en* 2016 *caducan* 1800 *latas de la fábrica A,* 2400 *procedentes de la B y* 3000 *que procede de la fábrica C.*

a) Calcúlese la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2016.

b) Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y caduca en 2016*, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la fabrica A?*

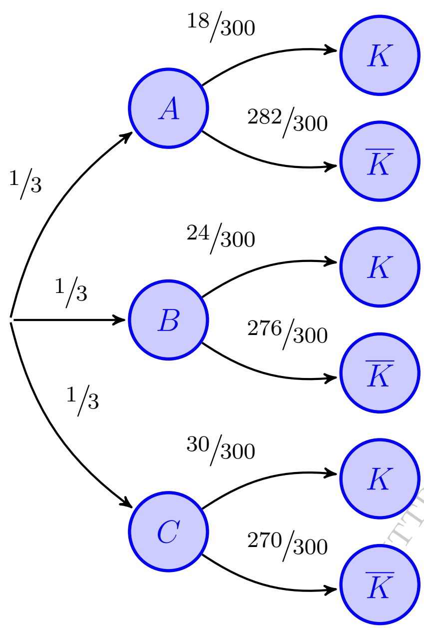
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La lata es de la fábrica A" $\qquad$ $B \equiv$ "La lata es de la fábrica B"

$C \equiv$ "La lata es de la fábrica C" $\qquad$ $K \equiv$ "La lata está caducada"



a) $$\begin{aligned} P(K) &= P\big((A\cap K)\cup(B\cap K)\cup(C\cap K)\big) \\ &= P(A\cap K)+P(B\cap K)+P(C\cap K) \\ &= P(A)\cdot P(K\mid A)+P(B)\cdot P(K\mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(K\mid C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{18}{300} \\ &+\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{300}+\frac{1}{3}\cdot\frac{30}{300} = 0.24 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A\mid K) &= \frac{P(A\cap K)}{P(K)} = \frac{P(A)\cdot P(K\mid A)}{P(K)} \\ &= \frac{1/3\cdot 18/300}{0.24} = 0.25 \end{aligned}$$

Ejercicio 65

Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja.

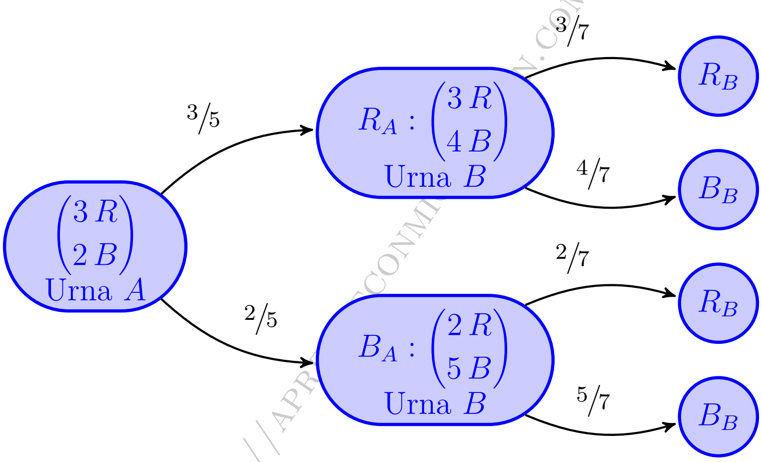
b) las dos bolas extraídas sean blancas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción BB)

Solución.

Sean los sucesos:

$$R_i \equiv \text{“Se extrae una bola roja de la urna } i\text{”}$$
$$B_i \equiv \text{“Se extrae una bola blanca de la urna } i\text{”}$$



a) $P(R_B) = P\big((R_A \cap R_B) \cup (B_A \cap R_B)\big) = P(R_A \cap R_B) + P(B_A \cap R_B)$

$$= P(R_A) \cdot P(R_B \mid R_A) + P(B_A) \cdot P(R_B \mid B_A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35} = 0.371$$

b) $P(B_A \cap B_B) = P(B_A) \cdot P(B_B \mid B_A) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{7} = 0.286$

Ejercicio 66

En cierta población animal tratada genéticamente, el número de hembras es el doble que el número de machos. Se observa que el 6 % de los machos de esa población padece albinismo, mientras que entre las hembras únicamente el 3 % padece albinismo. Calcúlese la probabilidad de que un individuo de esa población elegido al azar:

a) Padezca albinismo.

b) Sea hembra, en el supuesto de que padezca albinismo.

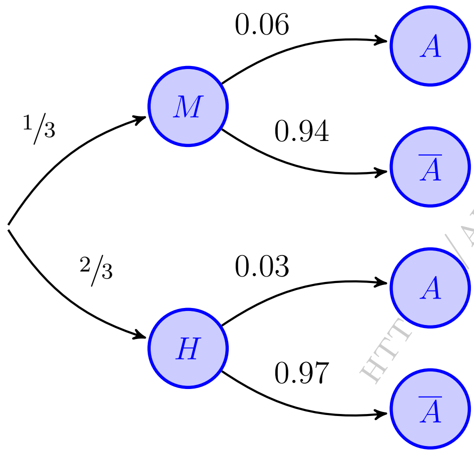
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{“El individuo es macho”}$$
$$H \equiv \text{“El individuo es hembra”}$$
$$A \equiv \text{“El individuo es albino”}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(H) = 2 \cdot P(M) \\ P(H) + P(M) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2P(M) + P(M) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} P(M) = 1/3 \\ P(H) = 2/3 \end{cases}$$



a) $P(A) = P\big((M \cap A) \cup (H \cap A)\big)$
$= P(M \cap A) + P(H \cap A)$
$= P(M) \cdot P(A \mid M) + P(H) \cdot P(A \mid H)$
$= \dfrac{1}{3} \cdot 0.06 + \dfrac{2}{3} \cdot 0.03 = 0.04$

b) $P(H \mid A) = \dfrac{P(H \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(H) \cdot P(A \mid H)}{P(A)}$
$= \dfrac{2/3 \cdot 0.03}{0.04} = 0.5$

Ejercicio 67

Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65 % de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5 % de los casos, mientas que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8 % de los casos. Calcúlese la probabildad de que:

a) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

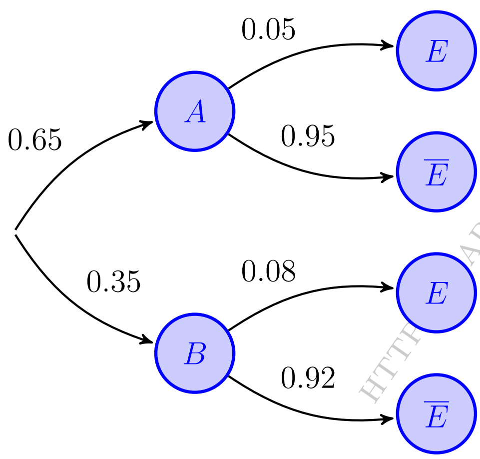
b) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El escáner utilizado es el A”}$$
$$B \equiv \text{“El escáner utilizado es el B”}$$
$$E \equiv \text{“El diagnóstico efectuado es erróneo”}$$



a) $P(E) = \big(P(A \cap E) \cup (B \cap E)\big)$
$$= P(A \cap E) + P(B \cap E)$$
$$= P(A) \cdot P(E \mid A) + P(B) \cdot P(E \mid B)$$
$$= 0.65 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.08 = 0.0605$$

b) $$P(A \mid E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A) \cdot P(E \mid A)}{P(E)}$$
$$= \frac{0.65 \cdot 0.05}{0.0605} = 0.537$$

Ejercicio 68

Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0.01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0.05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0.12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

a) Se estropee.

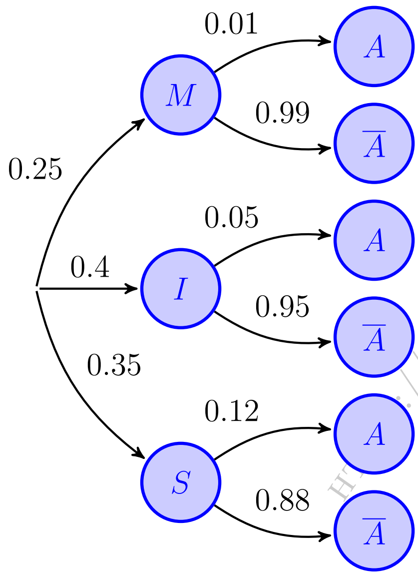
b) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

$M \equiv$ Antigüedad < 2 años $\qquad I \equiv 2 <$ Antigüedad < 4 años

$S \equiv$ Antigüedad > 4 años $\qquad E \equiv$ La furgoneta se estropea



a) $P(E) = P\big((M \cap E) \cup (I \cap E) \cup (S \cap E)\big)$
$= P(M \cap E) + P(I \cap E) + P(S \cap E)$
$= P(M) \cdot P(E \mid M) + P(I) \cdot P(E \mid I)$
$+ P(S) \cdot P(E \mid S) = 0.25 \cdot 0.01$
$+ 0.4 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.12 = 0.0645$

b) $P(S \mid \overline{E}) = \dfrac{P(S \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(S) \cdot P(\overline{E} \mid S)}{1 - P(E)}$
$= \dfrac{0.35 \cdot 0.88}{1 - 0.0645} = 0.329$

Ejercicio 69

El profesorado de cierta Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales está compuesto por profesores de Economía y de Empresa. El 60 % son de Economía y el 40 % de Empresa. Además el 55 % del profesorado de esa facultad son mujeres. De ellas, el 52 % son de Empresa. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado de dicha Facultad elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es de Empresa.

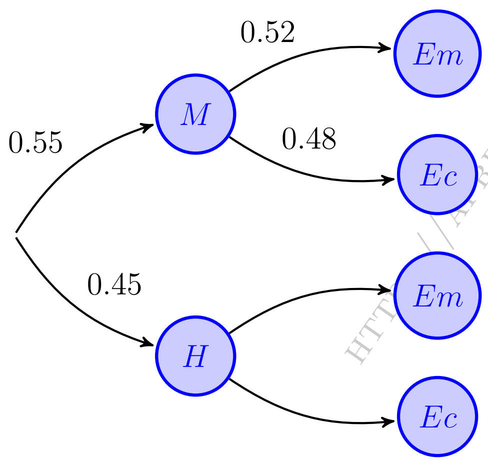
b) Sea de Economía y sea mujer.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2017 Junio - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} Ec &\equiv \text{El profesor es de Económía} \\ Em &\equiv \text{´´El profesor es de Empresa”} \\ M &\equiv \text{´´El miembro del profesorado es mujer”} \\ H &\equiv \text{´´El miembro del profesorado es hombre”} \end{aligned}$$



$$P(Ec) = 0.6 \implies P(Em) = 1 - P(Ec) = 0.4$$

a) $$\begin{aligned} P(M \mid Em) &= \frac{P(M \cap Em)}{P(Em)} \\ &= \frac{P(M) \cdot P(Em \mid M)}{P(Em)} \\ &= \frac{0.55 \cdot 0.52}{0.4} = 0.715 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(Ec \cap M) &= P(M \cap Ec) \\ &= P(M) \cdot P(Ec \mid M) \\ &= 0.55 \cdot 0.48 = 0.264 \end{aligned}$$

Ejercicio 70

Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0.02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0.06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador

a) No salga defectuoso.

b) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

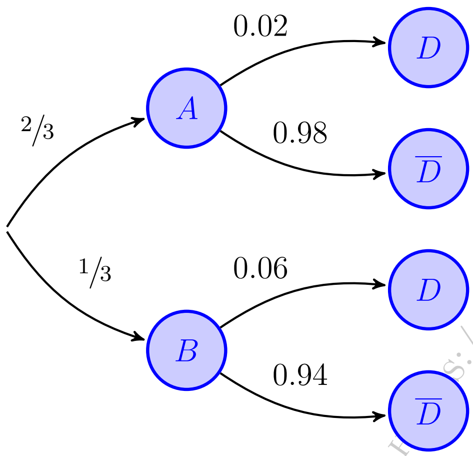
(Madrid - Matemáticas CCSS - 2017 Septiembre - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El ordenador es del modelo A”}$$
$$B \equiv \text{“El ordenador es del modelo B”}$$
$$D \equiv \text{“El ordenador es defectuoso”}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 2 \cdot P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2P(B) + P(B) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} P(A) = 2/3 \\ P(B) = 1/3 \end{cases}$$



a) $P(\overline{D}) = P\big((A \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overline{D})\big)$

$$= P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D})$$
$$= P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = 0.967$$

b) $P(A \mid D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{1 - P(\overline{D})}$

$$= \frac{2/3 \cdot 0.02}{1 - 0.967} = 0.404$$

Ejercicio 71

En un centro de danza el 60 % de los alumnos recibe clases de ballet. Por otro lado, entre quienes reciben clases de ballet, el 65 % también recibe clase de flamenco. Además sólo el 30 % de quienes no reciben clases de ballet recibe clases de flamenco. Calcúlese la probabilidad de que un alumno de dicho centro elegido al azar:

a) *Reciba clases de flamenco.*

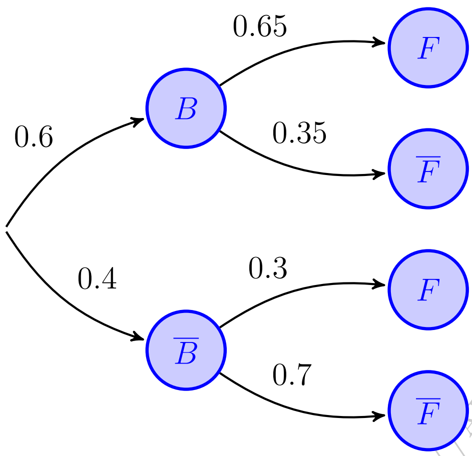
b) *Reciba clases de ballet si no recibe clases de flamenco.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

$$B = \text{“El alumno recibe clases de ballet”}$$
$$F = \text{“El alumno recibe clases de flamenco”}$$



a) $P(F) = P\Big((B \cap F) \cup (\overline{B} \cap F)\Big)$

$$P(B \cap F) + P(\overline{B} \cap F)$$
$$= P(B) \cdot P(F \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(F \mid \overline{B})$$
$$= 0.6 \cdot 0.65 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.51$$

b) $P(B \mid \overline{F}) = \dfrac{P(B \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B)}{1 - P(F)}$

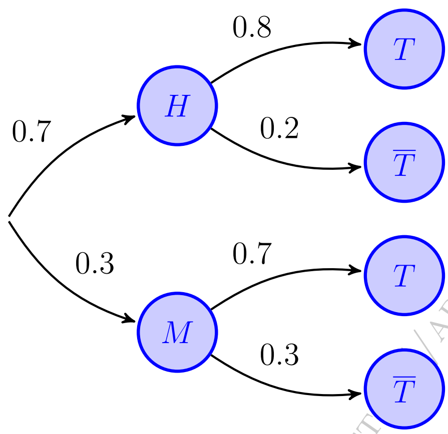
$$= \frac{0.6 \cdot 0.35}{1 - 0.51} = 0.429$$

Ejercicio 72 (2 *puntos*)

> *En una comunidad de vecinos en el* 70 % *de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el* 30 % *restante un nombre femenino. En dicha comunidad la probabildad de que un hombre trabaje es de 0.8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es* 0.7*. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:*
>
> *a) Una persona que trabaja.*
>
> *b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)*

Solución.
Sean los sucesos:

$$
\begin{aligned}
H &\equiv \text{“El primer nombre del buzon es masculino”}\\
M &\equiv \text{“El primer nombre del buzon es femenino”}\\
T &\equiv \text{“La persona trabaja”}
\end{aligned}
$$



a)
$$
\begin{aligned}
P(T) &= P\big((H\cap T)\cup(M\cap T)\big)\\
&= P(H\cap T)+P(M\cap T)\\
&= P(H)\cdot P(T\mid H)+P(M)\cdot P(T\mid M)\\
&= 0.7\cdot 0.8+0.3\cdot 0.7 = 0.77
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
P(H\mid T) = \frac{P(H\cap T)}{P(T)} &= \frac{P(H)\cdot P(T\mid H)}{P(T)}\\
&= \frac{0.7\cdot 0.8}{0.77} = 0.727
\end{aligned}
$$

Ejercicio 73

Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.

a) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.

b) Si el 65 % de los participantes son hombres y el 35 % mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

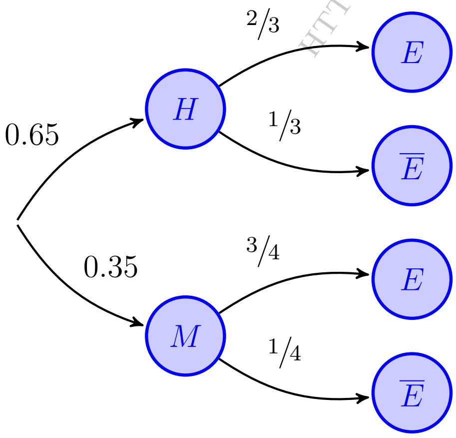
a) Denominamos los sucesos:

$$He \equiv \text{“El hombre elegido ha entrenado”}$$
$$Me \equiv \text{“La mujer elegida ha entrenado”}$$

$$P(He \cup Me) = P(He) + P(Me) - P(He \cap Me) = P(He) + P(Me) - P(He) \cdot P(Me)$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$$

b) Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“La persona elegida es hombre”}$$
$$M \equiv \text{“La persona elegida es mujer”}$$
$$E \equiv \text{La persona ha entrenado}$$



$$P(E) = P\big((H \cap E) \cup (M \cap E)\big)$$
$$= P(H \cap E) + P(M \cap E)$$
$$= P(H) \cdot P(E \mid H) + P(M) \cdot P(E \mid M)$$
$$= 0.65 \cdot \frac{2}{3} + 0.35 \cdot \frac{3}{4} = 0.6958$$

$$P(H \mid E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{P(H) \cdot P(E \mid H)}{P(E)}$$
$$= \frac{0.65 \cdot {}^{2}/_{3}}{0.6958} = 0.6227$$

f

Ejercicio 74

En una determinada sede de la EVAU hay un 45 % de alumnos de la modalidad de Ciencias y un 40 % de Ciencias Sociales. Todos los alumnos de Ciencias Sociales hacen el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (MACCSSII). De los alumnos de Ciencias de esa sede, un 5 % va a realizar el examen MACCSSII. En esa sede ningún alumno del resto de modalidades se examina de MACCSSII. Se toma a un alumno al azar de esa sede. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Se examine de MACCSSII.

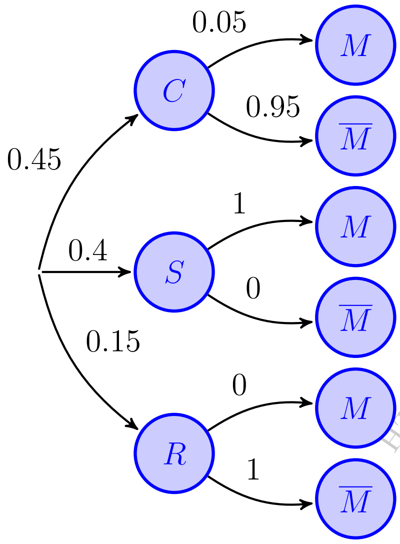
b) Sabiendo que se examina de MACCSS sea un alumno de la modalidad de Ciencias.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

$C \equiv$ "El alumno es de Ciencias" $\quad S \equiv$ "El alumno es de Ciencias Sociales"

$R \equiv$ "El alumno es de otra modalidad" $\quad M \equiv$ "El alumno se examina de MACCSSII"



a) $P(M) = P\big((C \cap M) \cup (S \cap M) \cup (R \cap M)\big)$

$= P(C \cap M) + P(S \cap M) + P(R \cap M)$

$= P(C) \cdot P(M \mid C) + P(S) \cdot P(M \mid S)$

$+ P(R) \cdot P(M \mid R) = 0.45 \cdot 0.05$

$+ 0.4 \cdot 1 + 0.15 \cdot 0 = 0.4225$

b) $P(C \mid M) = \dfrac{P(C \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(C) \cdot P(M \mid C)}{P(M)}$

$= \dfrac{0.45 \cdot 0.05}{0.4225} = 0.0533$

Ejercicio 75

Se escoge al azar un cliente de un determinado hotel de la costa española. Se sabe que la probabilidad de que sea español es 0.2. La probabilidad de que, siendo extranjero, sea hombre es 0.45. Finalmente la probabilidad de que sea una mujer española es 0.1. calcúlese la probabilidad de que:

a) Conocido que es español, sea un hombre.

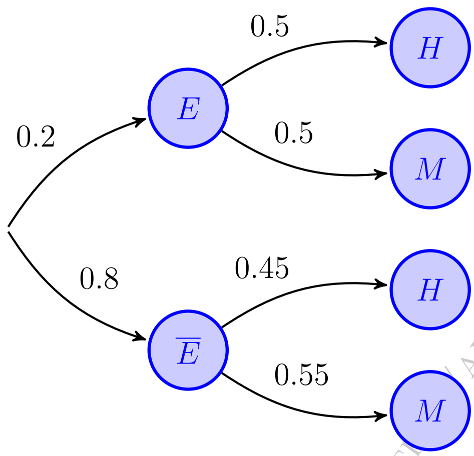
b) Sea una mujer.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“El cliente es hombre”}$$
$$M \equiv \text{“El cliente es mujer”}$$
$$E \equiv \text{“El cliente es español”}$$



a) $P(M \mid E) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0.1}{0.2} = 0.5$

$\implies P(H \mid E) = 1 - 0.5 = 0.5$

b) $P(M) = P\Big((E \cap M) \cup (\overline{E} \cap M)\Big)$

$= P(E \cap M) + P(\overline{E} \cap M)$

$= P(E) \cdot P(M \mid E) + P(\overline{E}) \cdot P(M \mid \overline{E})$

$= 0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.55 = 0.54$

Ejercicio 76

De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0.60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0.30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0.15. Seleccionado un niño al azar de esta región,

a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.

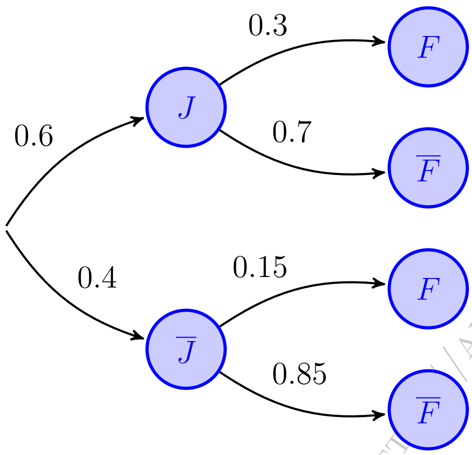
b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$J \equiv \text{“El niño juega más de lo recomendado”}$$
$$F \equiv \text{“El niño tiene fracaso escolar”}$$



a) $$P(F) = P\Big((J \cap F) \cup (\overline{J} \cap F)\Big)$$
$$= P(J \cap F) + P(\overline{J} \cap F)$$
$$= P(J) \cdot P(F \mid J) + P(\overline{J}) \cdot P(F \cap \overline{J})$$
$$= 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.15 = 0.24$$

b) $$P(\overline{J} \mid F) = \frac{P(\overline{J} \cap F)}{P(F)} = \frac{P(\overline{J}) \cdot P(F \mid \overline{J})}{P(F)}$$

$$P(\overline{J} \mid F) = \frac{0.4 \cdot 0.15}{0.24} = 0.25$$

Ejercicio 77

En una panadería se elabora pan de dos tipos: blanco y cereales. Uno de cada tres panes es de cereales. Un pan blanco tiene la misma probabilidad de estar elaborado con masa congelada que con masa fresca, mientras que la probabilidad de que un pan de cereales se elabore con masa fresca es de 0.6. Se elige un pan al azar. Determínese la probabilidad de que:

a) Esté elaborado con masa fresca.

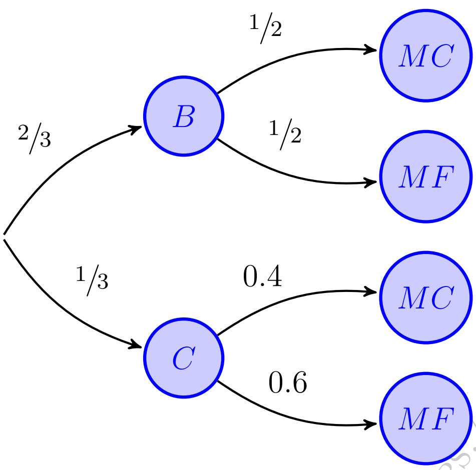
b) Sea de cereales sabiendo que está elaborado con masa congelada.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$B \equiv$ "El pan es blanco" $\qquad C \equiv$ "El pan es de cereales"

$MC \equiv$ "El pan es de masa congelada" $\qquad MF \equiv$ "El pan es de masa fresca"



a)
$$\begin{aligned} P(MF) &= P\big((B\cap MF)\cup(C\cap MF)\big) \\ &= P(B\cap MF)+P(C\cap MF) \\ &= P(B)\cdot P(MF\mid B)+P(C)\cdot P(MF\mid C) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0.6 = 0.53 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(C\mid MC) &= \frac{P(C\cap MC)}{P(MC)} \\ &= \frac{P(C)\cdot P(MC\mid C)}{1-P(MF)} \\ &= \frac{1/3\cdot 0.4}{1-0.53} = 0.286 \end{aligned}$$

Ejercicio 78

Una única carta, escogida al azar, es eliminada, sin ser vista, de una baraja española de 40 cartas, 10 cartas de cada palo (espadas, copas, oros y bastos). Una vez eliminada se escoge al azar otra carta, entre las qe quedan en el mazo, y se observa.

a) Calcúlese la probabilidad de que la carta observada sea del palo de espadas.

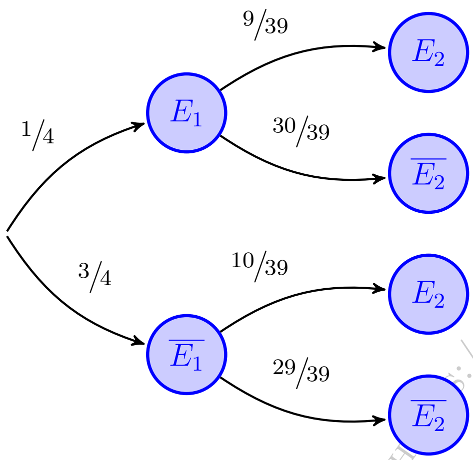
b) Si la carta observada no es del palo de espadas, calcúlese la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

$$E_1 = \text{“La carta eliminada es de espadas”}$$
$$E_2 = \text{“La carta observada es de espadas”}$$



a) $$P(E_2) = P\Big((E_1 \cap E_2) \cup (\overline{E_1} \cap E_2)\Big)$$
$$= P(E_1 \cap E_2) + P(\overline{E_1} \cap E_2)$$
$$= P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) + P(\overline{E_1}) \cdot P(E_2 \mid \overline{E_1})$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} + \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{39} = \frac{1}{4}$$

b) $$P(\overline{E_1} \mid \overline{E_2}) = \frac{P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})}{P(\overline{E_2})}$$
$$= \frac{P(\overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_2} \mid \overline{E_1})}{1 - P(E_2)}$$
$$= \frac{3/4 \cdot 29/39}{1 - 1/4} = \frac{29}{39}$$

Ejercicio 79

Se lanza un dado para decidir si se va al cine o al teatro. Si sale 1 *o* 6 *se va al teatro, en caso contrario al cine. Luego, se escoge una función al azar, de cine o teatro, según lo que haya indicado el dado. El* 50 % *de las funciones de teatro son comedias mientras que sólo* 112 *de las* 448 *funciones de cine lo son.*

a) Calcúlese la probabilidad de ver una comedia.

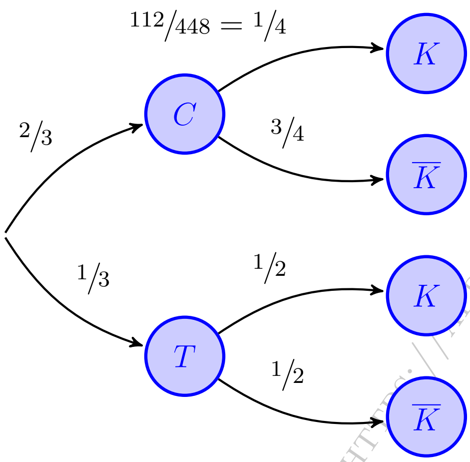
b) Si el resultado fue no ver comedia, calcúlese la probabilidad de que haya sido en el teatro.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$C \equiv \text{“Se va al cine”}$$
$$T \equiv \text{“Se va al teatro”}$$
$$K \equiv \text{“Se ve una comedia”}$$



a) $$\begin{aligned} P(K) &= P\big((C \cap K) \cup (T \cap K)\big) \\ &= P(C \cap K) + P(T \cap K) \\ &= P(C) \cdot P(K \mid C) + P(T) \cdot P(K \mid T) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(T \mid \overline{K}) &= \frac{P(T \cap \overline{K})}{P(\overline{K})} = \frac{P(T) \cdot P(\overline{K} \mid T)}{1 - P(K)} \\ &= \frac{{}^{1}/_{3} \cdot {}^{1}/_{2}}{1 - {}^{1}/_{3}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 80

En una tienda en periodo de rebajas, el 80 % de las ventas son de ropa y el 20 % restante son complementos de moda. De las ventas que se realizan en la campaña, el 20 % de las ventas de ropa son devueltas, mientras que solo se devuelven el 10 % de los complementos. Si una de las ventas es elegida al azar, calcule la probabilidad de que la venta:

a) Sea una prenda de ropa y sea devuelta.

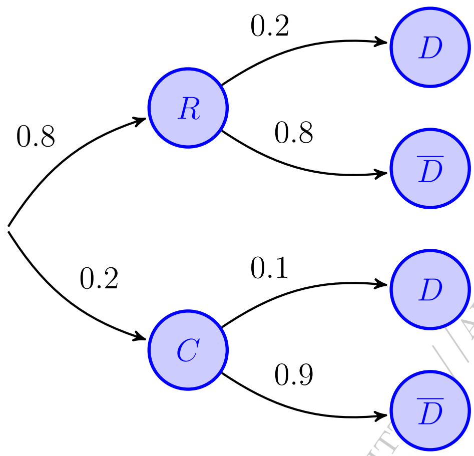
b) Sea devuelta.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$R \equiv \text{“La venta es de ropa”}$$
$$C \equiv \text{“La venta es de complementos de moda”}$$
$$D \equiv \text{“La compra es devuelta”}$$



a) $P(R \cap D) = P(R) \cdot P(D \mid R)$
$= 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$

b) $P(D) = P\big((R \cap D) \cup (C \cap D)\big)$
$= P(R \cap D) + P(C \cap D)$
$= P(R) \cdot P(D \mid R) + P(C) \cdot P(D \mid C)$
$= 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.18$

Ejercicio 81

Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0.5, 0.6 y 0.45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) *Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.*

b) *Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?*

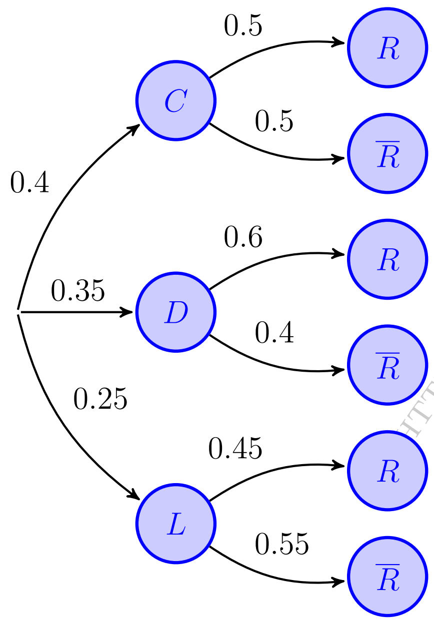
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2020 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$C \equiv$ "Senderismo en río Cuervo" $\qquad D \equiv$ "Senderismo en río Duratón"

$L \equiv$ "Senderismo en río Lobos" $\qquad R \equiv$ "Llueve durante la excursión"



a) $$\begin{aligned} P(\overline{R}) &= P\big((C\cap\overline{R})\cup(D\cap\overline{R})\cup(L\cap\overline{R})\big) \\ &= P(C\cap\overline{R}) + P(D\cap\overline{R}) + P(L\cap\overline{R}) \\ &= P(C)\cdot P(\overline{R}\mid C) + P(D)\cdot P(\overline{R}\mid D) \\ &+ P(L)\cdot P(\overline{R}\mid L) = 0.4\cdot 0.5 \\ &+ 0.35\cdot 0.4 + 0.25\cdot 0.55 = 0.4775 \end{aligned}$$

b) $$P(C\mid R) = \frac{P(C\cap R)}{P(R)} = \frac{P(C)\cdot P(R\mid C)}{1-P(\overline{R})}$$
$$= \frac{0.4\cdot 0.5}{1-0.4775} = 0.3828$$

Ejercicio 82

En un festival de circo de verano el $70\,\%$ de los espectáculos son gratuitos y el resto de pago. El $60\,\%$ de los espectáculos gratuitos se realizan en las calles, mientras que de los de pago sólo se realizan en la calle el $20\,\%$. Si un visitante del festival, elegido al azar, decide ir a un espectáculo, calcule la probabilidad de que:

a) El espectáculo sea gratuito y no se realize en la calle.

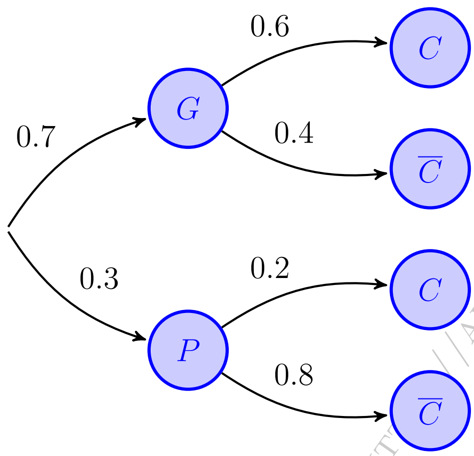
b) El espectáculo se realice en la calle.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$G \equiv \text{“El espectáculo es gratuito”}$$
$$P \equiv \text{“El espectáculo es de pago”}$$
$$C \equiv \text{“El espectáculo se hace en la calle”}$$



a) $P(G \cap \overline{C}) = P(G) \cdot P(\overline{C} \mid G) = 0.7 \cdot 0.4$
$= 0.28$

b) $P(C) = P\big((G \cap C) \cup (P \cap C)\big)$
$= P(G \cap C) + P(P \cap C)$
$= P(G) \cdot P(C \mid G) + P(P) \cdot P(C \mid P)$
$= 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.48$

Ejercicio 83

En un instituto se decide que los alumnos solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0.7. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0.2. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

a) Sea el examen de un alumno.

b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

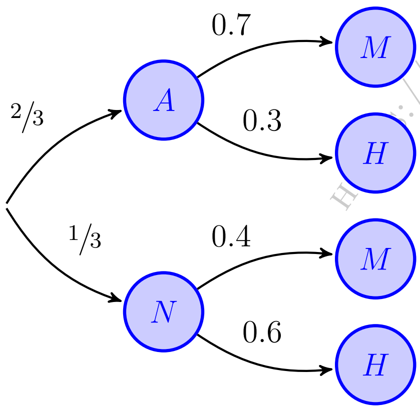
Sean los sucesos:

$$\begin{aligned}
A &\equiv \text{“El examen está escrito en azul”}\\
N &\equiv \text{“El examen está escrito en Negro”}\\
M &\equiv \text{“El examen lo ha realizado una alumna”}\\
H &\equiv \text{“El examen lo ha realizado una alumno”}
\end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(A)=\frac{2}{3} \quad \& \quad P(M\mid A)=0.7 \quad \& \quad P(N\cap H)=0.2$$

$$P(N\cap H)=P(N)\cdot P(H\mid N)=\frac{1}{3}\cdot P(H\mid N)=0.2 \implies P(H\mid N)=0.6$$



a) $$\begin{aligned}P(H) &= P\big((A\cap H)\cup(N\cap H)\big)\\
&= P(A\cap H)+P(N\cap H)\\
&= P(A)\cdot P(H\mid A)+P(N)\cdot P(H\mid N)\\
&= \frac{2}{3}\cdot 0.3+\frac{1}{3}\cdot 0.6 = 0.4\end{aligned}$$

b) $$P(H\mid N)=\frac{P(N\cap H)}{P(N)}=\frac{0.2}{1/3}=0.6$$

Ejercicio 84

En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

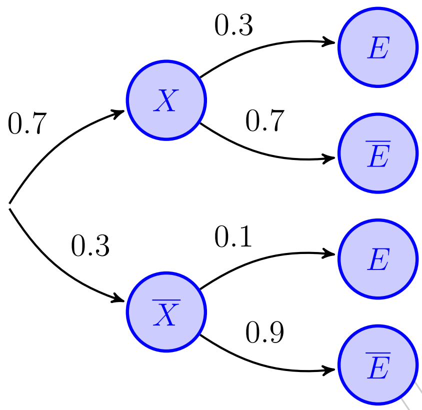
b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

Sean los siguientes sucesos:

$$X \equiv \text{“La verdura es de proximidad”}$$
$$E \equiv \text{“La verdura es ecológica”}$$



a) $$\begin{aligned} P(\overline{E}) &= P\big((X \cap \overline{E}) \cup (\overline{X} \cap \overline{E})\big) \\ &= P(X \cap \overline{E}) + P(\overline{X} \cap \overline{E}) \\ &= P(X) \cdot P(\overline{E} \mid X) + P(\overline{X}) \cdot P(\overline{E} \mid \overline{X}) \\ &= 0.7 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.76 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(X \cup E) &= P(X) + P(E) - P(X \cap E) \\ &= P(X) + 1 - P(\overline{E}) - P(X) \cdot P(E \mid X) \\ &= 0.7 + 1 - 0.76 - 0.7 \cdot 0.3 = 0.73 \end{aligned}$$

Ejercicio 85

El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.

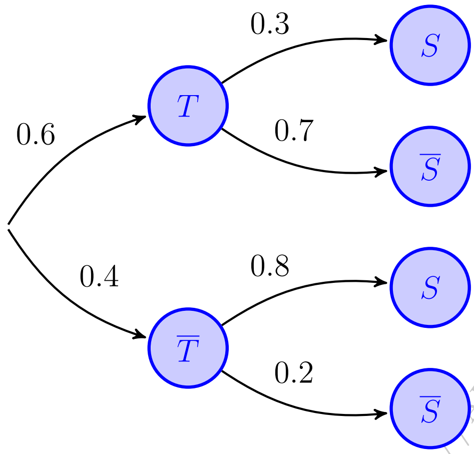
b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$T \equiv \text{“El empleado teletrabaja”}$$
$$S \equiv \text{“El empleado tiene trastorno del sueño”}$$



a) $P(\overline{S} \cap T) = P(T) \cdot P(\overline{S} \mid T)$

$= 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$

b) $P(\overline{T} \mid \overline{S}) = \dfrac{P(\overline{T} \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} \overset{(*)}{=} \dfrac{0.4 \cdot 0.2}{0.5} = 0.16$

$(*)\ P(\overline{S}) = P\Big((T \cap \overline{S}) \cup (\overline{T} \cap \overline{S})\Big)$

$= P(T \cap \overline{S}) + P(\overline{T} \cap \overline{S})$

$= P(T) \cdot P(\overline{S} \mid T) + P(\overline{T}) \cdot P(\overline{S} \mid \overline{T})$

$0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.5$

Ejercicio 86

Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0.02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0.06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.

b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

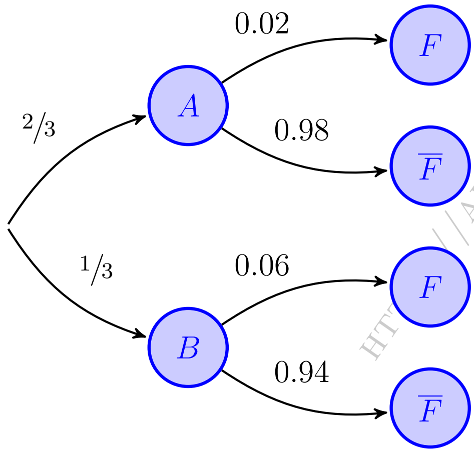
(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} A &\equiv \text{“El alumno reside en el municipio } A\text{”} \\ B &\equiv \text{“El alumno reside en el municipio } B\text{”} \\ F &\equiv \text{“El alumno tiene fracaso escolar”} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 2 \cdot P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 \cdot P(B) + P(B) = 1 \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{3} \Longrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$



a) $$\begin{aligned} P(\overline{F}) &= P\big((A \cap \overline{F}) \cup (B \cap \overline{F})\big) \\ &= P(A \cap \overline{F}) + P(B \cap \overline{F}) \\ &= P(A) \cdot P(\overline{F} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = 0.967 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A \mid F) &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{1 - P(\overline{F})} \\ &= \frac{{}^2\!/\!_3 \cdot 0.02}{1 - 0.967} = 0.4 \end{aligned}$$

Ejercicio 87

Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El 60 % de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el 40 % restante del segundo. El 50 % de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un 80 % para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:

a) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.

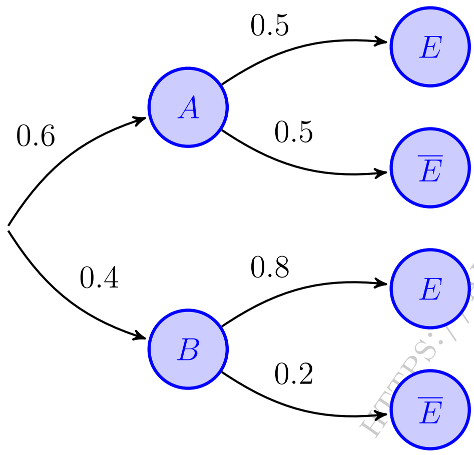
b) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El plato es del primer restaurante”}$$
$$B \equiv \text{“El plato es del segundo restaurante”}$$
$$E \equiv \text{“El plato es productos ecológicos”}$$



a) $P(E) = P\big((A \cap E) \cup (B \cap E)\big)$
$$= P(A \cap E) + P(B \cap E)$$
$$= P(A) \cdot P(E \mid A) + P(B) \cdot P(E \mid B)$$
$$= 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.8 = 0.62$$

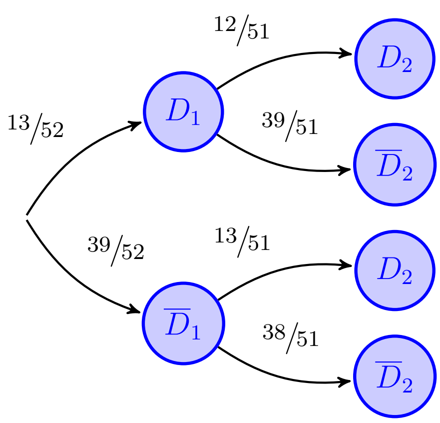
b) $P(B \mid \overline{E}) = \dfrac{P(B \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(B) \cdot P(\overline{E} \mid B)}{1 - P(E)}$
$$= \frac{0.4 \cdot 0.2}{1 - 0.62} = 0.2105$$

Ejercicio 88

> *Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.*
>
> *a) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.*
>
> *b) Si la carta observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)*

Solución. Sean los sucesos:

$$D_i \equiv \text{“La carta de la extracción } i \text{ es de diamantes”}$$



a) $$\begin{aligned} P(D_2) &= P\big((D_1 \cap D_2) \cup (\overline{D}_1 \cap D_2)\big) \\ &= P(D_1 \cap D_2) + P(\overline{D}_1 \cap D_2) \\ &= P(D_1) \cdot P(D_2 \mid D_1) + P(\overline{D}_1) \cdot P(D_2 \mid \overline{D}_1) \\ &= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(\overline{D}_1 \mid \overline{D}_2) &= \frac{P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2)}{P(\overline{D}_2)} = \frac{P(\overline{D}_1) \cdot P(\overline{D}_2 \mid \overline{D}_1)}{1 - P(D_2)} \\ &= \frac{\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{38}{51} = 0.754 \end{aligned}$$

Ejercicio 89

Ganar en el juego del gambón depende de la actitud de los participantes. El 50 % de ellos son pesimistas y se sienten perdedores antes de haber jugado. El 30 % no lo ve claro y el resto son optimistas y se sienten ganadores antes de jugar. La probabilidad de que ganen los primeros es 0.5, de que ganen los segundos es 0.7 y de que ganan los últimos es 0.9.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador escogido al azar gane el juego?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea alguien que se haya sentido un perdedor antes de haber jugado el juego?

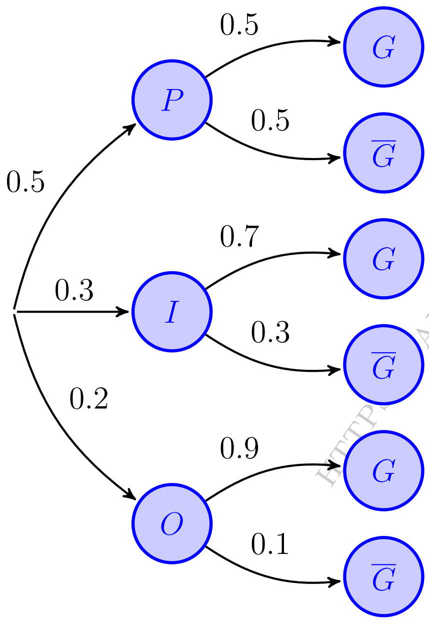
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

P = "El jugador es pesimista" I = "El jugador es indiferente"

O = "El jugador es opptimista" G = "El jugador gana el juego"



a) $P(G) = P\big((P\cap G)\cup(I\cap G)\cup(O\cap G)\big)$

$= P(P\cap G) + P(I\cap G) + P(O\cap G)$

$= P(P)\cdot P(G\mid P) + P(I)\cdot P(G\mid I)$

$+ P(O)\cdot P(G\mid O) = 0.5\cdot 0.5$

$+ 0.3\cdot 0.7 + 0.2\cdot 0.9 = 0.64$

b) $P(P\mid G) = \dfrac{P(P\cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(P)\cdot P(G\mid P)}{P(G)}$

$= \dfrac{0.5\cdot 0.5}{0.64} = 0.3906$

Ejercicio 90

Tres amigas Ana, Berta y Carla elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

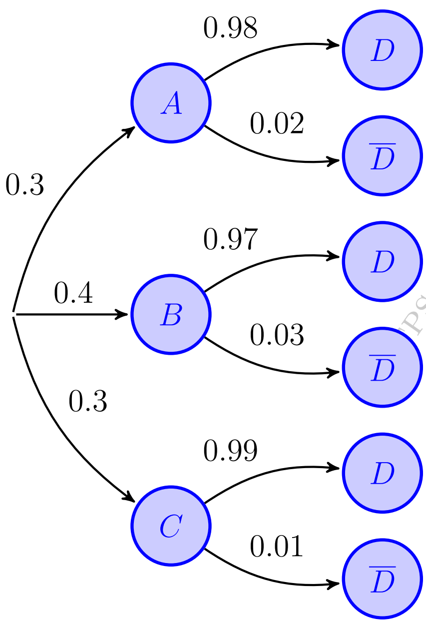
b) Si una invitación no llegó a su destino ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La invitación es enviada por Ana”}$$
$$B \equiv \text{“La invitación es enviada por Berta”}$$
$$C \equiv \text{“La invitación es enviada por Carla”}$$
$$D \equiv \text{“La invitación llega a su destino”}$$



a) $$\begin{aligned} P(\overline{D}) &= P\big((A\cap\overline{D})\cup(B\cap\overline{D})\cup(C\cap\overline{D})\big) \\ &= P(A\cap\overline{D}) + P(B\cap\overline{D}) + P(C\cap\overline{D}) \\ &= P(A)\cdot P(\overline{D}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{D}\mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(\overline{D}\mid C) = 0.3\cdot 0.02 \\ &+ 0.4\cdot 0.03 + 0.3\cdot 0.01 = 0.021 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(A\mid\overline{D}) &= \frac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A)\cdot P(\overline{D}\mid A)}{P(\overline{D})} \\ &= \frac{0.3\cdot 0.02}{0.021} = 0.2856 \end{aligned}$$

Ejercicio 91

Un virus muy peligroso está presente en el 5 % de la población nacional. Se tiene un test para detectar la presencia del virus que es correcto en el 85 % de los casos. Es decir, entree los portadores del virus, el test ha dado positivo el 85 % de las veces y entre los no portadores ha dado negativo el 85 % de las veces.

a) Si se practica el test a un individuo de la población escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo?

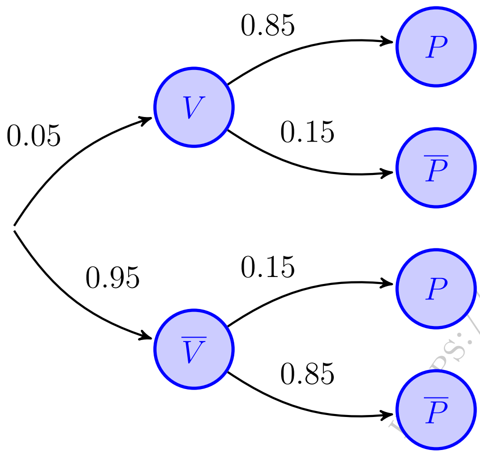
b) Si da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo escogido realmente sea un portador del virus?.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$V \equiv \text{“El paciente es portador del virus”}$$
$$P \equiv \text{“El test da positivo en detección del virus”}$$



$$\text{a)}\ \ P(P) = P\big((V \cap P) \cup (\overline{V} \cap P)\big)$$
$$= P(V \cap P) + P(\overline{V} \cap P)$$
$$= P(V) \cdot P(P \mid V) + P(\overline{V}) \cdot P(P \mid \overline{V})$$
$$= 0.05 \cdot 0.85 + 0.95 \cdot 0.15 = 0.185$$

$$\text{b)}\ \ P(V \mid P) = \frac{P(V \cap P)}{P(P)} = \frac{P(V) \cdot P(P \mid V)}{P(P)}$$
$$= \frac{0.05 \cdot 0.85}{0.185} = 0.2297$$

Ejercicio 92

Se tienen 7 sobres cerrados. Uno de ellos contiene un premio y el resto son sobres vacíos. Se lanza un dado y luego se descartan tantos sobres vacíos como el dado indique. Posteriormente, se escoge al azar uno de los sobres que restan.

a) ¿Cuál es la probabilidad de escoger el sobre premiado?

b) Si salió el premio, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del dado haya sido el 1?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

a) Sean los sucesos:

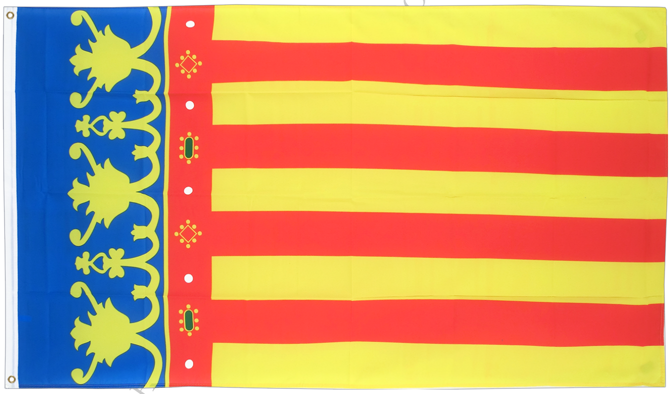
$$D_i \equiv \text{“Sale el número } i \text{ en el dado”}$$
$$G \equiv \text{“El jugador se lleva el premio”}$$

La probabilidad de que salga un i en el dado es $P(D_i) = \dfrac{1}{6}$, mientras que la probabilidad de que gane el premio habiendo salido un i en el dado es $P(G \mid D_i) = \dfrac{1}{7-i}$, ya que solo hay un premio entre los $7-i$ sobres que restan, tras retirar i sobres vacíos.

$$\begin{aligned} P(G) &= P\big((D_1 \cap G) \cup (D_2 \cap G) \cup (D_3 \cap G) \cup (D_4 \cap G) \cup (D_5 \cap G) \cup (D_6 \cap G)\big) \\ &= P(D_1 \cap G) + P(D_2 \cap G) + P(D_3 \cap G) + P(D_4 \cap G) + P(D_5 \cap G) + P(D_6 \cap G) \\ &= P(D_1) \cdot P(G \mid D_1) + P(D_2) \cdot P(G \mid D_2) + P(D_3) \cdot P(G \mid D_3) \\ &+ P(D_4) \cdot P(G \mid D_4) + P(D_5) \cdot P(G \mid D_5) + P(D_6) \cdot P(G \mid D_6) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1} = \frac{49}{120} \simeq 0.40833 \end{aligned}$$

b) $P(D_1 \mid G) = \dfrac{P(D_1 \cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(D_1) \cdot P(G \mid D_1)}{P(G)} = \dfrac{1/6 \cdot 1/6}{49/120} = \dfrac{10}{147} = 0.06803$

Comunidad Valenciana



Ejercicio 93

En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30 % si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

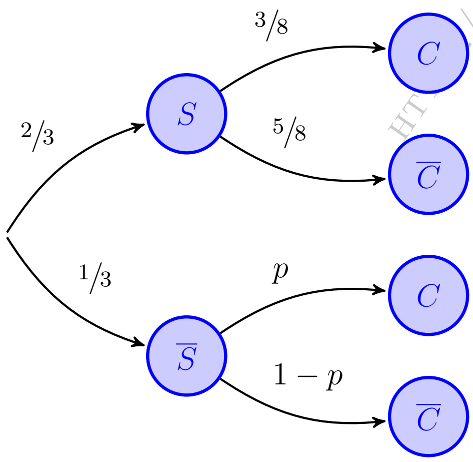
(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Modelo 2021)

Solución.

Sean los sucesos:

$S \equiv$ "El hogar tiene una Smart TV"
$C \equiv$ "En el hogar han contratado televisión de pago"

$$P(C) = P\Big((S\cap C)\cup(\overline{S}\cap C)\Big) = P(S\cap C) + P(\overline{S}\cap C)$$
$$= P(S)\cdot P(C\mid S) + P(\overline{S})\cdot P(C\mid \overline{S}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot p = 0.3 \implies p = 0.15$$



a) $P(\overline{S}\cap C) = P(\overline{S})\cdot P(C\mid\overline{S}) = \frac{1}{3}\cdot 0.15 = 0.05$

b) $P(S\mid C) = \dfrac{P(S\cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(S)\cdot P(C\mid S)}{P(C)}$

$= \dfrac{2/3\cdot 3/8}{0.3} = 0.833$

c) $P(\overline{S}\mid\overline{C}) = \dfrac{P(\overline{S}\cap\overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{P(\overline{S})\cdot P(\overline{C}\mid\overline{S})}{1-P(C)}$

$= \dfrac{1/3\cdot 0.85}{1-0.3} = 0.4047$

Ejercicio 94

Sabemos que el $5\,\%$ de los hombres y el $2\,\%$ de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5000 euros. Se sabe también que el $30\,\%$ de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros.

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la proababilidad de que dicho trabajador sea mujer?

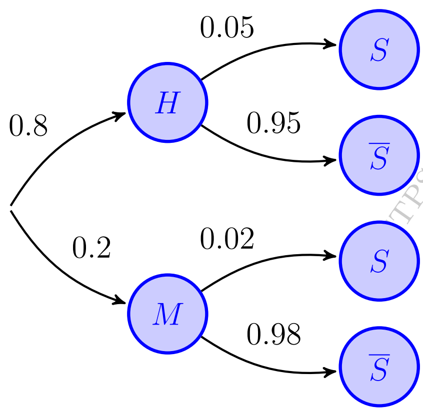
c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros?

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Modelo 2021)

Solución.

Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{"El trabajador es hombre"}$$
$$M \equiv \text{"El trabajador es mujer"}$$
$$S \equiv \text{"El trabajador gana más de 5000€"}$$



a) $P(S) = P\big((H\cap S)\cup(M\cap S)\big)$
$= P(H\cap S) + P(M\cap S)$
$= P(H)\cdot P(S\mid H) + P(M)\cdot P(S\mid M)$
$= 0.7\cdot 0.05 + 0.3\cdot 0.02 = 0.041$

b) $P(M\mid S) = \dfrac{P(M\cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(M)\cdot P(S\mid M)}{P(S)}$
$= \dfrac{0.3\cdot 0.02}{0.041} = 0.14626$

c) $P(H\cap S) = P(H)\cdot P(S\mid H) = 0.7\cdot 0.05 = 0.035$, luego el $3.5\,\%$ de los trabajadores son hombres que ganan más de 5000€.

Ejercicio 95

Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4.7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30 % de los teléfonos móviles tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30 % de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25 % de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4.7 pulgadas y del 40 % de los que poseen un teléfpno ,móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

a) Si el 34 % de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4.7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas.

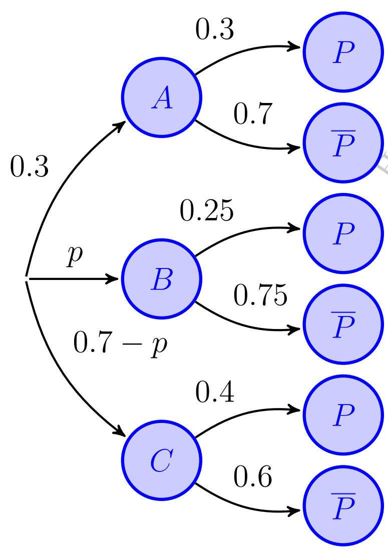
b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4.7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Junio 2021)

Solución.

$A \equiv$ "El móvil tiene pantalla de $4''$ " $\quad B \equiv$ "El móvil tiene pantalla de $4.7''$"
$C \equiv$ "El móvil tiene pantalla de $5''$" $\quad P \equiv$ "El móvil tiene protector de pantalla"



a) $P(P) = P\big((A\cap P)\cup(B\cap P)\cup(C\cap P)\big)$
$= P(A\cap P) + P(B\cap P) + P(C\cap P)$
$= P(A)\cdot P(P\mid A) + P(B)\cdot P(P\mid B)$
$+ P(C)\cdot P(P\mid C) = 0.3\cdot 0.3 + p\cdot 0.25$
$+ (0.7-p)\cdot 0.4 = 0.37 - 0.15p = 0.34$
$\Rightarrow p = 0.2 \implies$ 20 % usa $4.7''$ & 50 % usa $5''$

b) $$P(C\mid P) = \frac{P(C\cap P)}{P(P)} = \frac{P(C)\cdot P(P\mid C)}{P(P)} = \frac{0.5\cdot 0.4}{0.34} = 0.5882$$

c) $$P(C\cap P\mid \overline{B}\cap P) = \frac{P\big((C\cap P)\cap(\overline{B}\cap P)\big)}{P(\overline{B}\cap P)} = \frac{P(C\cap P)}{P(A\cap P)+P(C\cap P)}$$
$$= \frac{P(C\cap P)}{P(A)\cdot P(P\mid A) + P(C)\cdot P(P\mid C)} = \frac{0.5\cdot 0.4}{0.3\cdot 0.3 + 0.5\cdot 0.4} = 0.6896$$

Ejercicio 96

Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5 % de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99 % de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95 %. Se pide:

a) La probabilidad de que una persona está enferma si ha dado positivo en el test.

b) La probabilidad de que una persona está sana si ha dado negativo en el test.

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto.

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1 % de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona está en ferma si ha dado positivo en el test en este caso?

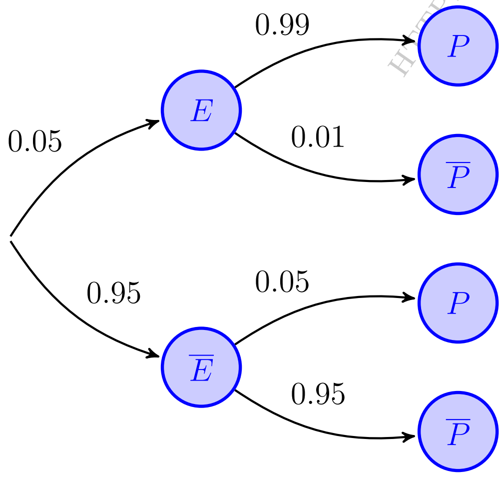
(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Julio 2021)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} &\equiv \text{“”} \\ E &\equiv \text{“La persona tiene la enfermedad”} \\ P &\equiv \text{“El test da positivo”} \end{aligned}$$

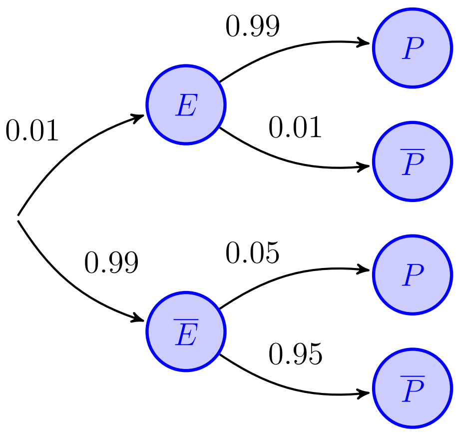
$$\begin{aligned} P(P) &= P\Big(P(E\cap P)\cup(\overline{E}\cap P)\Big) = P(E\cap P)+P(\overline{E}\cap P) \\ &= P(E)\cdot P(P\mid E)+P(\overline{E})\cdot P(P\mid\overline{E}) = 0.05\cdot 0.99+0.95\cdot 0.05 = 0.097 \end{aligned}$$



a) $$P(E\mid P) = \frac{P(E\cap P)}{P(P)} = \frac{P(E)\cdot P(P\mid E)}{P(P)} = \frac{0.05\cdot 0.99}{0.097} = 0.5103$$

b) $$P(\overline{E}\mid\overline{P}) = \frac{P(\overline{E}\cap\overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{P(\overline{E})\cdot P(\overline{P}\mid\overline{E})}{1-P(P)} = \frac{0.95\cdot 0.95}{1-0.097} = 0.9994$$

c) $$\begin{aligned} P\Big((E\cap P)\cup(\overline{E}\cap\overline{P}) &= P(E\cap P)+P(\overline{E}\cap\overline{P}) \\ &= P(E)\cdot P(P\mid E)+P(\overline{E})\cdot P(\overline{P}\mid\overline{P}) \\ &= 0.05\cdot 0.99+0.95\cdot 0.95 = 0.952 \end{aligned}$$



d) $$\begin{aligned} P(P) &= P\Big((E \cap P) \cup (\overline{E} \cap P)\Big) \\ &= P(E \cap P) + P(\overline{E} \cap P) \\ &= P(E) \cdot P(P \mid E) + P(\overline{E}) \cdot P(P \mid \overline{E}) \\ &= 0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.05 = 0.0594 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E \mid P) &= \frac{P(E \cap P)}{P(P)} = \frac{P(E) \cdot P(P \mid E)}{P(P)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.0594} = 0.16646 \end{aligned}$$

Ejercicio 97

Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30 % tiene menos de 30 años, un 55 % tienee entre 30 y 60 años, y el 15 % restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado: entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado: y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

a) *Llamemos A al suceso "el cliente seleccionado tiene más de 60 años" y llamemos B al suceso "el cliente seleccionado no presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(A \cup B)$.*

b) *Llamemos C al suceso "el cliente seleccionado tiene 30 años o más" y D al suceso "el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(C \cap D)$.*

c) *Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenega 60 años o menos.*

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Junio 2022)

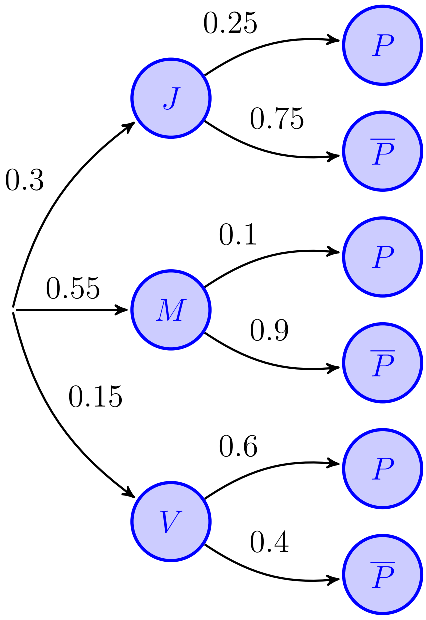
Solución.

Sean los sucesos:

$J \equiv$ "El cliente tiene menos de 30 años" $\quad M \equiv$ "El cliente tiene entre 30 y 60 años"

$V \equiv$ "El cliente tiene más de 60 años" $\quad P \equiv$ "El cliente presenta parte de accidente"

$$\begin{aligned} P(P) &= P\Big((J \cap P) \cup (M \cap P) \cup (V \cap P)\Big) = P(J \cap P) + P(M \cap P) + P(V \cap P) \\ &= P(J) \cdot P(J \cap P) + P(M) \cdot P(M \cap P) + P(V) \cdot P(V \cap P) \\ &= 0.3 \cdot 0.25 + 0.55 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.6 = 0.22 \end{aligned}$$



a) $P(A \cup B) = P(V \cup \overline{P}) = P(V) + P(\overline{P}) - P(V \cap \overline{P})$
$= P(V) + 1 - P(P) - P(V) \cdot P(\overline{P} \mid V)$
$= 0.15 + 1 - 0.22 - 0.15 \cdot 0.4 = 0.87$

b) $P(C \cap D) = P\big((M \cup V) \cap P\big)$
$= P\big((M \cap P) \cup (V \cap P)\big)$
$= P(M \cap P) + P(V \cap P)$
$= P(M) \cdot P(P \mid M) + P(V) \cdot P(P \mid V)$
$= 0.55 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.6 = 0.145$

c) $P(\overline{V} \mid P) = 1 - P(V \mid P) = 1 - \dfrac{P(V \cap P)}{P(P)}$
$= 1 - \dfrac{P(V) \cdot P(P \mid V)}{P(P)}$
$= 1 - \dfrac{0.15 \cdot 0.6}{0.22} = 0.591$

2ª Forma: Tabla de Contingencia

Tomamos una población múltiplo de 100 (en nuestro caso 200 para evitar decimales) y rellenamos la tabla de contingencia, con los sucesos definidos en el apartado anterior:

	J	M	V	**Total**
P	15	11	18	44
$\overline{P}$	$\frac{3}{4} \cdot 60 = 45$	$\frac{9}{10} \cdot 110 = 99$	$\frac{2}{5} \cdot 30 = 12$	156
Total	$0.3 \cdot 200 = 60$	$0.55 \cdot 200 = 110$	$0.15 \cdot 200 = 30$	200

a) $P(A \cup B) = P(V \cup \overline{P}) = P(V) + P(\overline{P}) - P(V \cap \overline{P}) = \dfrac{30}{200} + \dfrac{156}{200} - \dfrac{12}{200} = \dfrac{174}{200} = 0.87$

b) $P(C \cap D) = P\big((M \cup V) \cap P\big) = P\big((M \cap P) \cup (V \cap P)\big) = P(M \cap P) + P(V \cap P)$
$= \dfrac{11}{200} + \dfrac{18}{200} = \dfrac{29}{200} = 0.145$

c) $P(\overline{V} \mid P) = \dfrac{44 - 18}{44} = \dfrac{26}{44} = 0.591$

Ejercicio 98

El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sabe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoría el 30 % de las empresas merece una calificación de "Excelente", el 50 % de las empresas merece la calificación de "Aceptable" y el 20 % restante merece una calificación de "Deficiente". El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90 % de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10 % de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de "Aceptable".

a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación "Deficiente"?

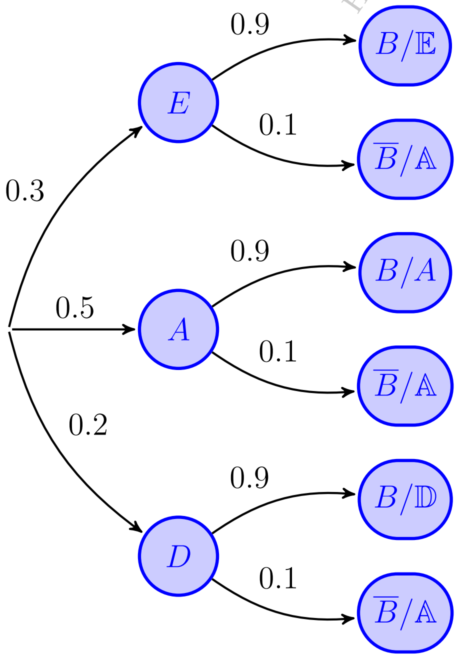
b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece?

c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la califiación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de "Aceptable", ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente?

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

Solución.

$E \equiv$ "La empresa merece una calificación de *Excelente*"
$A \equiv$ "La empresa merece una calificación de *Aceptable*"
$D \equiv$ "La empresa merece una calificación de *Deficiente*"
$\mathbb{E} \equiv$ "La empresa obtiene una calificación de *Excelente*"
$\mathbb{A} \equiv$ "La empresa obtiene una calificación de *Aceptable*"
$\mathbb{D} \equiv$ "La empresa obtiene una calificación de *Deficiente*"
$B \equiv$ "El auditor es bueno"



a) $P(\mathbb{D}) = P(D \cap \mathbb{D}) = P(D) \cdot P(\mathbb{D} \mid D)$
$= 0.2 \cdot 0.9 = 0.18 \implies 18\,\%$

b) $P\big((E \cap \mathbb{E}) \cup (A \cap \mathbb{A}) \cup (D \cap \mathbb{D}) = P(E \cap \mathbb{E})$
$+ P(A \cap \mathbb{A}) + P(D \cap \mathbb{D}) = P(E) \cdot P(\mathbb{E} \mid E)$
$+ P(A) \cdot P(\mathbb{A} \mid A) + P(D) \cdot P(\mathbb{D} \mid D)$
$= 0.3 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0.9 = 0.95 \implies 95\,\%$

c) $$P(B \mid \mathbb{A}) = \frac{P(B \cap \mathbb{A})}{P(\mathbb{A})}$$
$$= \frac{P(B) \cdot P(\mathbb{A} \mid B)}{P(E \cap \mathbb{A}) + P(A \cap \mathbb{A}) + P(D \cap \mathbb{A})}$$
$$= \frac{0.5 \cdot 0.9}{0.3 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0.1} = \frac{9}{11}$$
$= 0.8182 \implies 81.82\,\%$