MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

# EVAU MODELO 2017

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Modelo 2017
# Opción A

**Ejercicio 1 (3 *puntos*)**

*Dadas las rectas* $r \equiv \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ *y* $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = 2 \end{cases}$ *, se pide:*

a) *(1.5 puntos) Comprobar que se cruzan y calcular la distancia entre ellas.*

b) *(1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$.*

c) *(0.5 puntos) Hallar el ángulo que forma la recta $r$ con el plano $y = 0$.*

*(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción A)*

**Solución.**



a) Tenemos que $r \equiv \begin{cases} R(2,3,-1) \\ \vec{d_r} = (5,1,2) \end{cases}$ , $s \equiv \begin{cases} S(1,3,2) \\ \vec{d_s} = (1,-1,0) \end{cases}$

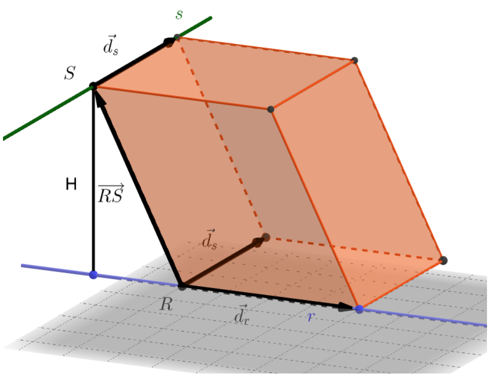
Como $\vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$ las rectas se cortan en un plano o se cruzan en el espacio. Para determinarlo sacamos el vector que une los puntos $R$ y $S$: $\overrightarrow{RS} = (-1,0,3)$ y hallamos el producto mixto:

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{d_r}, \vec{d_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

Para calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan hallaremos la altura del paralelepípedo formado por los vectores directores $\vec{d_r}$ y $\vec{d_s}$ y el vector $\overrightarrow{RS}$ que une ambas rectas.

$$Vol_{paralel.} = A_{base} \cdot H \implies H = \frac{Vol}{A_{base}}$$

Como el volumen del paralelepípedo es $\left|\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right]\right|$ y el área de la base es $\left|\vec{d_r} \times \vec{d_s}\right|$ tenemos que:




$$d(r,s) = H = \frac{|-20|}{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\|} = \frac{20}{|(2,2,-6)|} = \frac{20}{\sqrt{44}} = \frac{10\sqrt{11}}{11}\ u$$

b) Hallamos el plano $\pi$ que contiene a la recta $r$ y es paralelo a $s$.

$$\pi \equiv \begin{cases} R(2,3,-1) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (2,2,-6) \simeq (1,1,-3) \end{cases} \Longrightarrow x + y - 3z + D = 0$$

$$\Longrightarrow 2 + 3 - 3 \cdot (-2) + D = 0 \Longrightarrow D = -8 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv x + y - 3z - 8 = 0}$$

c) Para hallar el ángulo que forman la recta $r$ y el plano $\pi$ podemos calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{d}_r$ y $\vec{n}_\pi \Longrightarrow \cos(\widehat{\vec{d}_r, \vec{n}_\pi}) = \dfrac{\left|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d}_r\right| \cdot |\vec{n}_\pi|}$ que será igual al seno del ángulo buscado. Así:

$$\operatorname{sen}(\widehat{r, \pi}) = \frac{\left|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d}_r\right| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{|5 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0|}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \Longrightarrow \boxed{\widehat{r, \pi} = 10.52^\circ}$$

**Ejercicio 2 (3 *puntos*)**

> *Dadas las matrices*
>
> $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
>
> *Se pide:*
>
> *a) (1.5 puntos) Determinar el rango de $B$ en función de los valores de $m$.*
>
> *b) (1.5 puntos) Calcular la matriz inversa de $A$ y comprobar que verifica $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 + 3C)$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción A)*

**Solución.**

a) $|B| = -4 + 2m + 4m - (4m^2 - 4 + 2) = -4m^2 + 6m - 2 = 0 \implies m = \{1/2, 1\}$
Por lo tanto:

- Si $m \neq \{1/2, 1\} \implies |B| \neq 0 \implies \text{ran}(B) = 3$
- Si $m = \{1/2, 1\} \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow \text{ran}(B) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran}B = 2$

Como vemos no es necesario tratar los casos $m = 1/2$ y $m = 1$ por separado porque hay un menor de orden 2 distinto de cero que no depende de $m$.

b) $|A| = 0 - 1 + 2 - (0 - 2 - 2) = 5 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$, que hallaremos por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj }(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj }(A)^{\top} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5} \cdot \left(A^2 - 3C\right) = \frac{1}{5} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

**Ejercicio 3 (2 *puntos*)**

*Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta* 600 *euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es* 2 *euros, venderían* 5000 *papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán* 500 *papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?*
*Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?*

*(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción A)*

**Solución.**

Si llamamos $x$ al precio de cada papeleta, para hallar función de recaudación $f(x)$ hemos de tener en cuenta que:

- El número de papeletas vendidas será 5000 menos 500 por cada euro que el precio supere a 2, es decir $5000 - 500 \cdot (x - 2)$.
- el precio de cada papeleta es $x$



$$f(x) = [5000 - 500 \cdot (x - 2)] \cdot x = 6000x - 500x^2$$

Para hallar el máximo sacamos los puntos singulares:

$$f'(x) = 6000 - 1000x = 0 \implies x = 6$$
$$f''(x) = -1000 < 0 \implies \text{ en } x = 6 \text{ hay un máximo}$$

Así que vendiendo la papeleta a 6€ obtendremos una recaudación de $f(6) = 18000$€, pudiendo donar a la ONG $18000 - 600 = 17400$€.

**Ejercicio 4 (2 *puntos*)**

> *Calcular el área comprendida entre la curva $y = (x-1)e^x$ y la recta $y = x - 1$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción A)*

**Solución.**

Sean las funciones:

$$f(x) = (x-1)e^x$$
$$g(x) = x - 1$$
$$h(x) = f(x) - g(x) = (x-1)e^x - (x-1) = (x-1)\cdot(e^x - 1)$$

Los puntos de corte de $h(x)$ con el eje OX son:

$$(x-1)\cdot(e^x-1) = 0 \implies \begin{cases} x - 1 = 0 \implies x = 1 \\ e^x - 1 = 0 \implies e^x = 1 \implies x = 0 \end{cases}$$

lo que define un único recinto de integración $A_1 = (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 [(x-1)\cdot(e^x - 1]\,dx = \underbrace{\int_0^1 (x-1)e^x\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 (x-1)\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^1 (x-1)e^x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x - 1 \implies du = dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{array} \right\} = (x-1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= (x-1)e^x - e^x]_0^1 = e^x \cdot (x-2)]_0^1 = -e - (-2) = 2 - e$$
$$I_2 = \int_0^1 (x-1)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 1\right) - 0 = -\frac{1}{2}$$
$$A_1 = I_1 - I_2 = (2-e) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} - e$$
$$Area = |A_1| = \left|\frac{5}{2} - e\right| = e - \frac{5}{2} \simeq 0.2183\ u^2$$

# Modelo 2017
## Opción B

**Ejercicio 1 (3 *puntos*)**

*Se considera la función $f(x) = xe^{-x}$ y se pide:*

a) *(0.5 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de $f$.*

b) *(1.5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar sus extremos relativos.*

c) *(1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.*

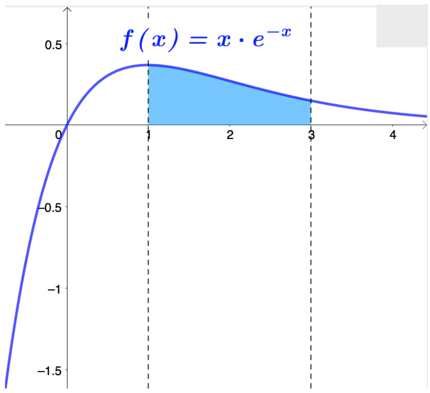
*(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción B)*

**Solución.**



a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, ya que se trata de una función exponencial.
Para el cálculo de las asíntotas:

- `Asíntota Vertical`. $\nexists$ A. V.
- `Asíntota Horizontal`
  - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} -xe^{x} = -\infty \Rightarrow \nexists$ A. H.
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$
    $\Longrightarrow$ A. H. en $y = 0$




- `Asíntota Oblícua`. $\nexists$ A. O. porque tiene A. H.

b) Para hallar la monotonía de la funció estudiamos sus puntos singulares:

$$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1-x) \cdot e^{-x} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \\ e^{-x} = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ sol.} \end{cases}$$

$\circ$ Si $x < 1 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$
$\circ$ Si $x > 1 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f(x)$ es decreciente en $(1, +\infty)$
$f''(x) = -e^{-x} - (1-x) \cdot e^{-x} = (x-2) \cdot e^{-x}$, y como $f''(1) = \dfrac{-1}{e} < 0$, la función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $(1, f(1)) = \left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

c) Para hallar el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje $OX$, buscamos los puntos de corte de la función con dicho eje:

$$f(x) = x \cdot e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Este punto no se encuentra situado entre las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$ por lo que se define un único recinto de integración: $A_1 = (1, 3)$.

$$A_1 = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 xe^{-x}\,dx = \begin{cases} u = x \implies du = dx \\ dv = e^{-x}dx \implies v = -e^{-x} \end{cases}$$
$$= -xe^{-x}\Big]_1^3 + \int_1^3 e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}\Big]_1^3$$
$$= (-x-1)\cdot e^{-x}\Big]_1^3 = \left(\frac{-4}{e^3}\right) - \left(-\frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e}\cdot\left(1 - \frac{2}{e^2}\right)$$
$$Area = |A_1| = \left|\frac{2}{e}\cdot\left(1-\frac{2}{e^2}\right)\right| = \frac{2}{e}\cdot\left(1-\frac{2}{e^2}\right) \simeq 0.54\ u^2$$

———— ∘ ————

**Ejercicio 2 (3 *puntos*)**

*Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(0,0,-3)$ y $P(1,1,1)$, se pide:*

a) *(1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.*

b) *(1 punto) Hallar el área del triángulo formado por $A$, $B$ y $P$.*

c) *(1 punto) hallar la distancia del punto $P$ a la recta que pasa por $A$ y $B$.*

*(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción B)*



**Solución.**

a) Para hallar el plano $\pi$ que pasa por $A$, $B$ y $P$, hallamos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{BX} = (x, y, z+3)$, $\overrightarrow{AB} = (-2,-1,-4)$, $\overrightarrow{AP} = (-1,0,0)$.

$$\left[\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}\right] = 0 \implies \begin{vmatrix} x & y & z+3 \\ -2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \boxed{\pi \equiv 4y - z - 3 = 0}$$

b) El área del triángulo $A\overset{\triangle}{B}P$ será:

$$Area_{\triangle} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BP}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot|(0,-4,1)| = \frac{\sqrt{17}}{2}\ u^2$$

c) Sea $r$ la recta que pasa por $A$ y $B$. $\quad r \equiv \begin{cases} B(0,0,-3) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{AB} = (-2,-1,-4) \end{cases}$

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{d_r}\times\overrightarrow{BP}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{21}} = \frac{|(0,4,-1)|}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{17}{21}}\ u$$

———— ∘ ————

**Ejercicio 3 (2 *puntos*)**

> *A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3?*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción B)*

**Solución.**

Sean las incógnitas

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{n}^{\text{o}} \text{ de rosas de cada ramo} \\ y &\equiv \text{n}^{\text{o}} \text{ de tulipanes de cada ramo} \\ z &\equiv \text{n}^{\text{o}} \text{ de lilas de cada ramo} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ x = 2 \cdot (y + z) \\ 5 \cdot (6x + 4y + 3z) = 610 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 6x + 4y + 3z = 122 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 122 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 6F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -3 & -3 & -24 \\ 0 & -2 & -3 & -22 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 - 2F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -3 & -3 & -24 \\ 0 & 0 & -3 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x + 2 + 6 = 24 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -3y - 3 \cdot 6 = -24 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -3z = -18 \quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 16 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{array}}$$

**Ejercicio 4 (2 *puntos*)**

*En una población de cierta especie de cérvidos, el 43 % de los adultos son machos y el 57 % hembras. Se sabe que el 11 % de los machos adultos y el 4 % de las hembras adultas sufre alguna afección ocular. Se supone que se captura al azar un ejemplar adulto y se pide:*

*a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que tenga alguna afección ocular.*

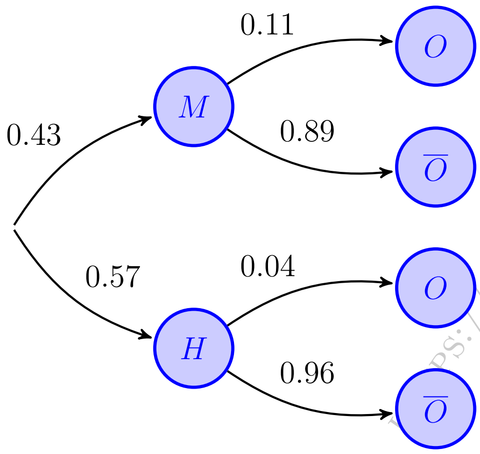
*b) (1 punto) Si el ejemplar capturado padeciere una afección ocular ¿cuál sería la probabilidad de que fuera un macho?*

*(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2017 - Opción B)*

**Solución.**

Sean los sucesos

$$M \equiv \text{“El cérvido es macho adulto”}$$
$$H \equiv \text{“El cérvido es hembra adulta”}$$
$$O \equiv \text{“El cérvido tiene una afección ocular”}$$




a) $P(O) = P\big((M\cap O)\cup(H\cap O)\big)$
$$= P(M\cap O) + P(H\cap O)$$
$$= P(M)\cdot P(O \mid M) + P(H)\cdot P(O \mid H)$$
$$= 0.43\cdot 0.11 + 0.57\cdot 0.04 = 0.0701$$

b) $P(M \mid O) = \dfrac{P(M\cap O)}{P(O)} = \dfrac{P(M)\cdot P(O \mid M)}{P(O)}$
$$= \frac{0.43\cdot 0.11}{0.0701} = 0.6747$$