MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2022
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2022 (Extraordinario)

Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Determina los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.*

b) *(1 punto) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B) \cdot X = Y$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 4a = 0 \implies \exists A^{-1} \; \forall a \neq 0.$

b) $(A-B) \cdot X = Y \Rightarrow \underbrace{(A-B)^{-1} \cdot (A-B)}_{I} \cdot X = (A-B)^{-1} \cdot Y \Rightarrow X = (A-B)^{-1} \cdot Y$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A - B| = -4$$

$$\operatorname{Adj}(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \implies (A-B)^{-1} = \frac{\operatorname{Adj}(A-B)^{\top}}{|A-B|} \cdot = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \underbrace{-\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{(A-B)^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{Y} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por

$$7y - 8x \leq 3400 \quad \& \quad 3x - 8y \leq 2000 \quad \& \quad 11x + 14y \geq 9500 \quad \& \quad x \leq 1200 \quad \& \quad y \leq 1000$$

a) (1 punto) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x+y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

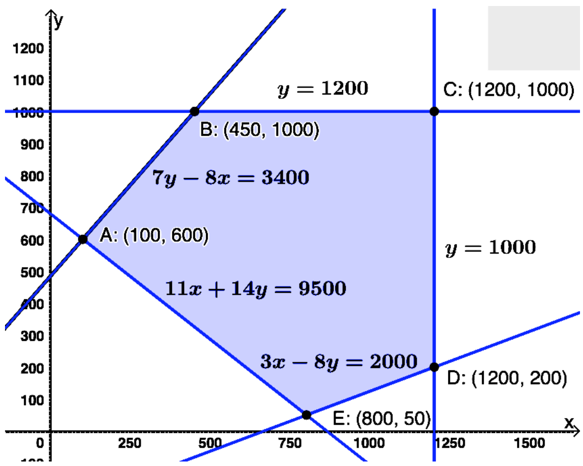
$$\begin{cases} ① \ 7y - 8x \leq 3400 & \rightarrow (100, 600) \quad \& \quad (-425, 0) \\ ② \ 3x - 8y \leq 2000 & \rightarrow (0, -250) \quad \& \quad (800, 50) \\ ③ \ 11x + 14y \geq 9500 & \rightarrow (0, 678.5) \quad \& \quad (863.6, 0) \\ ④ \ x \leq 1200 \quad \& \quad y \leq 1000 & \rightarrow (0, 1000) \\ ⑤ \ y \leq 1000 & \rightarrow (1200, 0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	100	600	800
B	450	1000	1900
C	1200	1000	3400
D	1200	200	2600
E	800	50	1650



El *mínimo* de $f(x, y)$ es de 800 y se produce en el punto $E : (100, 600)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

a) *(1 punto) Se define $h(x)$ de la siguiente manera:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ si } x \leq 1 \\ g(x) & , \text{ si } > 1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe darle a la constante $a \in \mathbb{R}$ para que la función g sea continua en $\mathbb{R}$?

b) *(1 punto) Para $a = 2$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de f y de g.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , \text{ si } x \leq 1 \\ -x^2 + ax + 3 & , \text{ si } > 1 \end{cases}$$

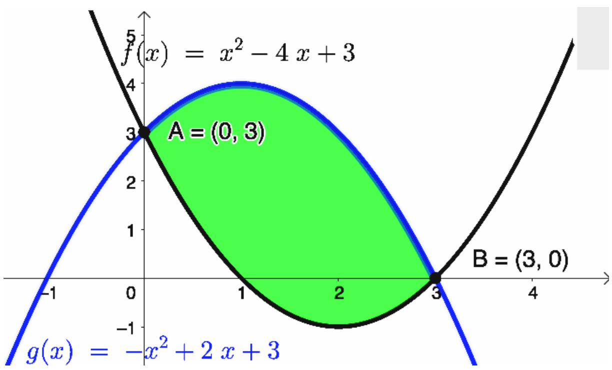
a) $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$, por lo que habrá que estudiar la continuidad de $h(x)$ en la frontera $x = 1$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - 4x + 3\right) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(-x^2 + ax + 3\right) = a + 2$
- $h(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$

$h(x)$ es continua en $x = 1 \iff \lim\limits_{x \to 1} h(x) = h(1) \implies a + 2 = 0 \implies \boxed{a = -2}$

b) Para $a = 2$, las funciones: $f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \& \quad g(x) = -x^2 + 2x + 3$
Creamos la función

$h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 4x + 3) - (-x^2 + 2x + 3) = 2x^2 - 6x = 0 \implies x = \{0, 3\}$



$$A_1 = \int_0^3 h(x)\, dx = \int_0^3 (2x^2 - 6x)\, dx = \left. \frac{2x^3}{3} - 3x^2 \right]_0^3 = (18 - 27) - 0 = -9$$

$Area = |A_1| = |-9| = 9 \ u^2$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además suponga que $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(B) = 0.7$.

a) (1 punto) Calcule $P(A^c)$.

b) (1 punto) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Nota: *A^c y B^c son , respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

Nota: Utilizaremos la notación $\overline{A}$ para el suceso complementario del suceso A.

Del enunciado tenemos:

$$P(A \cup B) = 1 \qquad \& \qquad P(A \cap B) = 0.2 \qquad \& \qquad P(B) = 0.7$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A}) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Longrightarrow\ 1 = 1 - P(\overline{A}) + 0.7 - 0.2 \ \Longrightarrow\ P(\overline{A}) = 0.5$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95 % para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0.2 y 0.3 los extremos de dicho intervalo.

a) (1 punto) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

b) (1 punto) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A)

Solución.

a) $I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) = (0.2; 0.3)$

$\Longrightarrow\ \hat{p} = \dfrac{0.2 + 0.3}{2} = 0.25 \qquad \& \qquad E = \dfrac{0.3 - 0.2}{2} = 0.15$

b) $E = ? \quad \& \quad \hat{p} = 0.25 \quad \& \quad n = 700 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \ \Longrightarrow\ \alpha = 0.05 \ \Longrightarrow\ \alpha/2 = 0.025 \ \Longrightarrow\ 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\dfrac{0.25 \cdot 0.75}{700}} = 0.0321$

Julio 2022 (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x - az = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + 1 = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*)=2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=0$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+2=2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow -z=-2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow y=0 \quad\quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=0 \\ y=0 \\ z=2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

> *a) (1 punto) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ verifique que $f(2)=4$ y $f'(2)=0$.*
>
> *b) (1 punto) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)*

Solución.

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \qquad \& \qquad f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$$

a)
- $f(2) = 4 \Rightarrow 2a + \dfrac{b}{2} = 4 \Rightarrow 4a+b=8$
- $f'(2) = 0 \Rightarrow a - \dfrac{b}{4} = 0 \Rightarrow 4a-b=0$

$$\begin{array}{r} 4a+\cancel{b}=8 \\ 4a-\cancel{b}=0 \\ \hline 8a=8 \end{array} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$4a-b=0 \Rightarrow 4\cdot 1 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

b) $g(x) = x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+1}{x} \implies \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

- `A. Vertical` $\implies \exists A.V.$ en $x=0$.

- $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} g(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$

- `A. Horizontal`

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \nexists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$$

- `A. Oblicua` Es una recta de la forma $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [g(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Luego $\exists \underset{x\to\pm\infty}{A.O.}$ en $y = x$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x) = x \cdot \frac{170 - 0.85x}{5}$$

en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

a) (1 punto) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

b) (1 punto) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

a) $B(x) = I(x) - C(x) = x \cdot \frac{170 - 0.85x}{5} - (10 + 2x + x^2) = -10 + 32x - 1.17x^2$

$B'(x) = 32 - 2.34x = 0 \implies x = 13.67521$ (miles de litros)

$B''(x) = -2.34 \implies B''(13.67521) < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máximo en $(13.67521, 208.803)$

Por lo tanto el *Beneficio máximo* asciende a 208803 euros con una demanda de 13675.21 litros de fertilizante

b) $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{10 + 2x + x^2}{x} \leq 10 \implies \dfrac{10 + 2x + x^2}{x} - 10 \leq 0 \implies \dfrac{x^2 - 8x + 10}{x} \leq 0$

Hay que tener en cuenta que los costes vienen dados en miles de euros. Hallamos las raíces del numerador y denominador para resolver la inecuación:

$$x^2 - 8x + 10 = 0 \implies x = \{1.5505, 6.4495\}$$

	$(0, 1.5505)$	$(1.5505, 6.4495)$	$(6.4495, +\infty)$
Signo $\frac{C(x)}{x} - 10$	$+$	-	$+$

Por lo que el *Coste medio* sería inferior a 10000 si la demanda está comprendida entre 1550.5 y 6449.5 litros de fertilizante.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Tres amigas Ana, Berta y Carla elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

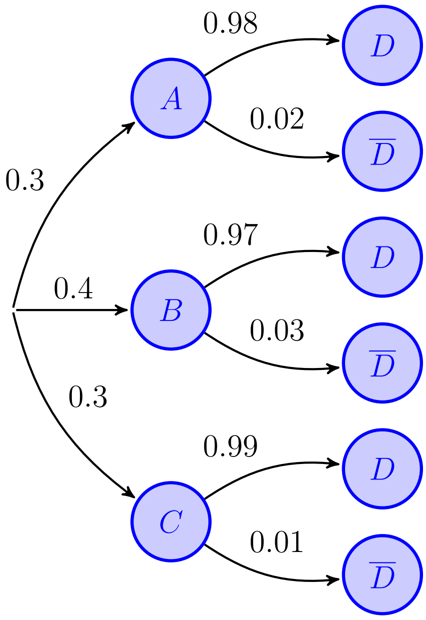
b) (1 punto) Si una invitación no llegó a su destino ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La invitación es enviada por Ana”}$$
$$B \equiv \text{“La invitación es enviada por Berta”}$$
$$C \equiv \text{“La invitación es enviada por Carla”}$$
$$D \equiv \text{“La invitación llega a su destino”}$$



a) $P(\overline{D}) = P\Big((A\cap\overline{D})\cup(B\cap\overline{D})\cup(C\cap\overline{D})\Big)$

$= P(A\cap\overline{D}) + P(B\cap\overline{D}) + P(C\cap\overline{D})$

$= P(A)\cdot P(\overline{D}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{D}\mid B)$

$+ P(C)\cdot P(\overline{D}\mid C) = 0.3\cdot 0.02$

$+ 0.4\cdot 0.03 + 0.3\cdot 0.01 = 0.021$

b) $P(A\mid\overline{D}) = \dfrac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{P(A)\cdot P(\overline{D}\mid A)}{P(\overline{D})}$

$= \dfrac{0.3\cdot 0.02}{0.021} = 0.2856$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157.125 y 182.875.

a) (1 punto) Calcule el valor de la media muestral.

b) (1 punto) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B)

Solución.

$$X:\mathcal{N}(\mu,15) \xrightarrow{n} I.C.(157.125;182.875)$$

a) $\overline{x} = \dfrac{157.125+182.875}{2} = 170 \qquad \& \qquad E = \dfrac{182.875-157.125}{2} = 12.875$

b) $X:\mathcal{N}(\mu,15) \quad \& \quad n=9 \quad \& \quad 1-\alpha = ?$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2}\cdot\frac{15}{\sqrt{9}} = 12.875 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$z_{\alpha/2} = 2.575 \xRightarrow{\textit{Tabla}} 1-\alpha/2 = 0.995 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \boxed{1-\alpha = 0.99}$$