MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2021

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2021

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se consideran las matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ m & 3 \end{pmatrix}$$

a) *(1.25 puntos) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:*

$$\begin{cases} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{cases}$$

b) *(0.5 puntos) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz C?*

c) *(0.75 puntos) Para $m = 1$, calcule la matriz inversa de C.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque A)

Solución.

a) Resolvemos el sistema de ecuaciones matriciales

$$\begin{array}{rcl} 3X + 2Y = A & \longrightarrow & 3X + \cancel{2Y} = A \\ -4X + Y = B & \xrightarrow{\times(-2)} & 8X - \cancel{2Y} = -2B \\ \hline & & 11X \quad = A - 2B \Longrightarrow \boxed{X = \dfrac{A - 2B}{11}} \end{array}$$

$$3 \cdot \frac{A - 2B}{11} + 2Y = A \qquad \Longrightarrow \boxed{Y = \frac{4A + 3B}{11}}$$

$$X = \frac{1}{11} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 11 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{11} \cdot \left[4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 44 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $|C| = 12 - 6m \neq 0 \implies m \neq 2 \implies \exists A^{-1} \ \forall m \neq 2$

c) Para $m = 1 \implies C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad |C| = 12 - 6 \cdot 1 = 6$

$$C^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

a) *(1.5 puntos) Represente gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones y determine sus vértices:*

$$2x + y \leq 6 \quad \& \quad 4x + y \leq 10 \quad \& \quad -x + y \leq 3 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

b) *(1 punto) Calcule el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque A)

Solución.

a) `Restricciones:` Escribimos los puntos necesarios para su representación

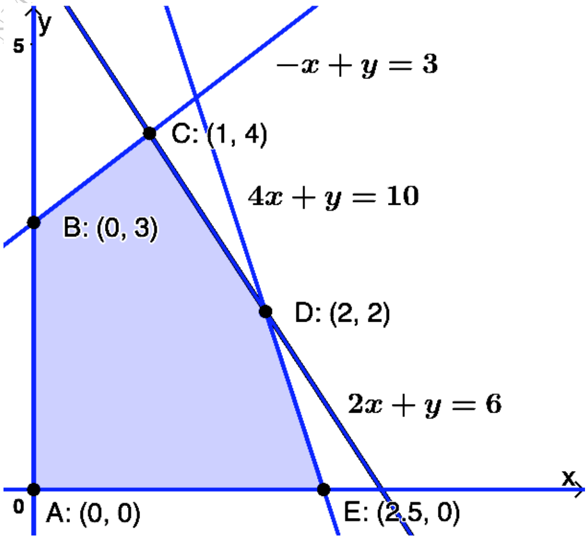
$$\begin{cases} ①\ 2x + y \leq 6 & \rightarrow (0, 6) \quad \& \quad (3, 0) \\ ②\ 4x + y \leq 10 & \rightarrow (0, 10) \quad \& \quad (2, 2) \\ ③\ -x + y \leq 3 & \rightarrow (0, 3) \quad \& \quad (-3, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

b) `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 4x + 2y - 3$

`Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

`Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	-3
B	0	3	3
C	1	4	9
D	2	2	9
E	2.5	0	7



El *máximo* de $f(x, y)$ es de 9 y se produce en cualquier punto del segmento $\overline{CD}$.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & , \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 10x & , \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) (0.5 puntos) Halle el dominio de f*.*

b) (1 punto) Estudie la derivabilidad de f *en* $x = 2$*.*

c) (1 punto) Calcule la integral indefinida de la función $f(x) = 2x^2 - 10x$*.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque B)

Solución.

a) $x - 1 = 0 \implies x = 1 \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b)
- `Continuidad en` $x = 2$
    - $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{x-1} = 4$
    - $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(2x^2 - 10x) = -12$
    - $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = -12$

  Como $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$, la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 2$.
- `Derivabilidad en` $x = 2$

  Como la función $f(x)$ no es continua en $x = 2$, tampoco es derivable en ese punto.
- $\displaystyle\int (2x^2 - 10x)\,dx = \frac{2x^3}{3} - 5x^2 + C$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Sea $C(x)$ la función de costes de una empresa, expresada en miles de euros, donde x mide, en toneladas, la cantidad producida. De esta función se sabe que $C'(x) = 7x^2 - 8x + 1$

a) *(0.5 puntos) Determine la cantidad a producir por la empresa para minimizar el coste.*

b) *(1 punto) Sabiendo que, si no hay producción, el coste asciende a 30000 euros, obtenga $C(x)$ ¿Cuál es el mínimo coste de producción para la empresa?*

c) *(1 punto) Si la cantidad a producir está entre 0 y 1.2 toneladas, ¿cuál sería la producción que supondría un mayor coste a la empresa?*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque B)

Solución.

a) $C'(x) = 7x^2 - 8x + 1 = 0 \implies x = \dfrac{8 \pm 6}{14} = \{1/7, 1\}$

	$(0, 1/7)$	$(1/7, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El coste $C(x)$ alcanza un *mínimo relativo* con una producción de 1 tonelada.

b) $C(x) = \displaystyle\int C'(x)\, dx = \int (7x^2 - 8x + 1)\, dx = \frac{7x^3}{3} - 4x^2 + x + K \xrightarrow{C(0)=30} K = 30$

$\implies C(x) = \dfrac{7x^3}{3} - 4x^2 + x + 30 \implies C_{min} = C(1) = \dfrac{94}{3} = 29333$ €,
que es menor que el coste de no producir nada que sería 30000 €

c) Mirando la monotonía de la función coste tendremos que estudiar el coste en:

$$C(1/7) = 29578 \quad \& \quad C(1.2) = 29472$$

El mayor coste se obtiene con una producción de 142.8 *kg* y asciende a 29578 €.

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

> *a) (1.25 puntos) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0.5 \quad \& \quad P(B) = 0.4 \quad \& \quad P(A \cup B) = 0.8$, determine $P(A \mid B)$.*
>
> *b) (1.25 puntos) Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0.3 \quad \& \quad P(D) = 0.8$, y que C y D son independientes, determine $P(C \cup D)$.*
>
> *(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque C)*

Solución.

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.8 = 0.1$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

b) $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \underset{Indep.}{\overset{C \text{ y } D}{=}} P(C) + P(D) - P(C) \cdot P(D)$

$$= 0.3 + 0.8 - 0.3 \cdot 0.8 = 0.86$$

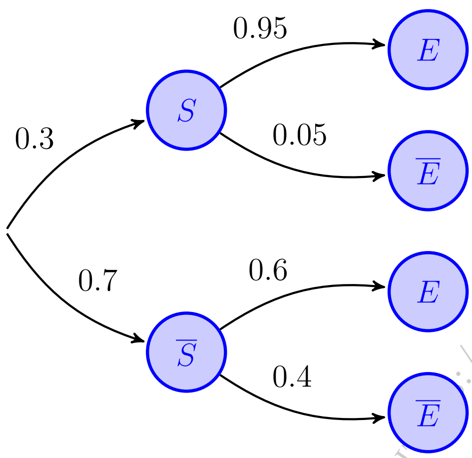
Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

> *Se sabe que el 30 % de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95 % tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60 % tiene empleo.*
>
> *a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar, tenga empleo.*
>
> *b) (1.5 puntos) Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.*
>
> *(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque C)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$S \equiv \text{“El individuo tiene estudios superiores”}$$
$$E \equiv \text{“El individuo tiene empleo”}$$



a) $P(E) = P\big((S \cap E) \cup (\overline{S} \cap E)\big)$

$$= P(S \cap E) + P(\overline{S} \cap E)$$
$$= P(S) \cdot P(E \mid S) + P(\overline{S}) \cdot P(E \mid \overline{S})$$
$$= 0.3 \cdot 0.95 + 0.7 \cdot 0.6 = 0.705$$

b) $P(S \mid E) = \dfrac{P(S \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(S) \cdot P(E \mid S)}{P(E)}$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.95}{0.705} = 0.4043$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media μ días y desviación típica 3 días.

a) (1.25 puntos) Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8.1 días.

b) (1.25 puntos) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ? con un error inferior a 1 día y un nivel de confianza del 92 %.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque D)

Solución.

$$X \equiv \text{“Permanencia en el hospital (días)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 8.1$

$$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} = 0.651$$

$$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (7.449; 8.751)}$$

b) $n = ?$ & $E < 1$ & $1 - \alpha = 0.92$

$$1 - \alpha = 0.92 \implies \alpha = 0.08 \implies \alpha/2 = 0.04 \implies 1 - \alpha/2 = 0.96 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.75$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.75 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = 27.56 \implies \boxed{n = 28}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Sea la población $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) *(1 punto) Construya todas las muestras posibles de tamaño* 2*, mediante muestreo aleatorio simple.*

b) *(1.5 puntos) Calcule la varianza de las mediaas muestrales.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Bloque D)

Solución.

a) Teniendo en cuenta que las muestras son con reemplazo el conjunto de muestras de tamaño 2 será:

$$\Big\{\{1,1\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{2.1\},\ \{2,2\},\ \{2,3\},\ \{2,4\}$$
$$\{3,1\},\ \{3,2\},\ \{3,3\},\ \{3,4\},\ \{4,1\},\ \{4,2\},\ \{4,3\},\ \{4,4\}\Big\}$$

b) Según el *teorema del límite central* la media de las medias muestrales es μ y su varianza $\frac{\sigma^2}{n}$, en donde:

$$\mu \equiv \text{“Media poblacional”}$$
$$\sigma \equiv \text{“Varianza poblacional”}$$
$$n \equiv \text{“Tamaño muestral (2)”}$$

$$\mu = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5 \quad \& \quad \sigma^2 = \frac{(1-2.5)^2 + (2-2.5)^2 + (3-2.5)^2 + (4-2.5)^2}{4} = 1.25$$

Y por tanto:

$$\text{Varianza medias muestrales} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1.25}{2} = 0.625$$