MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2022
- Ordinario -
- Suplente -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022 (Reserva)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una fábrica de juguetes educativos produce juegos de ajedrez y dominó. Para fabricar un ajedrez se necesitan 2 kg de madera y 4 horas de trabajo, mientras que para fabricar un dominó se necesita 1 kg de madera y 1 hora de trabajo. Para que la producción sea rentable hay que hacer al día al menos 3 juegos y emplear como máximo 7 kg de madera y 9 horas de trabajo. Cada ajedrez se vende por 40€ y cada dominó por 15€. ¿Cuántos juegos de ajedrez y dominó deben fabricarse diariamente para que la ganancia obtenida sea máxima? ¿Cuál será esa ganancia?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A - Suplente)

Solución.

	Ajedrez	Dominó	Restricciones
Madera (kg)	2	1	≤ 7
Mano de obra (h)	4	1	≤ 9

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº de ajedreces fabricados"
  $y \equiv$ "Nº de dominós fabricados"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

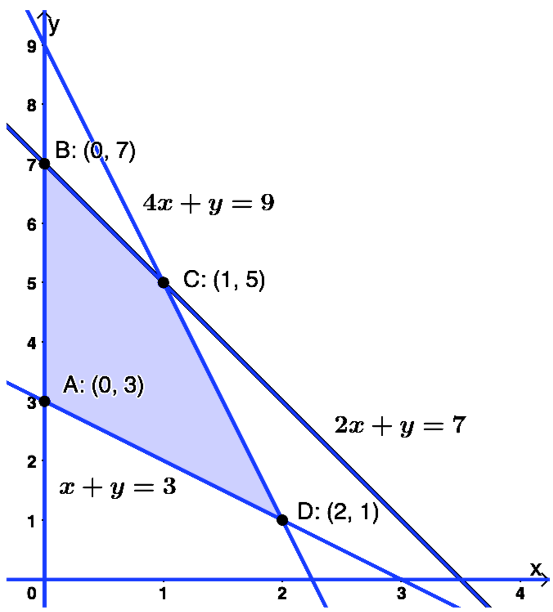
$$\begin{cases} \textcircled{1}\ 2x + y \leq 7 & \rightarrow (0,7) \quad \& \quad (3.5, 0) \\ \textcircled{2}\ 4x + y \leq 9 & \rightarrow (0,9) \quad \& \quad (2.25, 0) \\ \textcircled{3}\ x + y \geq 3 & \rightarrow (0,3) \quad \& \quad (3, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 40x + 15y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	3	45
B	0	7	105
C	1	5	115
D	2	1	95



La *ganancia máxima* es de 115€ fabricando 1 ajedrez y 5 dominó cada día.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

& $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ & $D = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A^\top - X \cdot A = 3I_3$.

b) (1 punto) ¿Existe algún valor del parámetro a *para el que se verifique* $C^\top \cdot D = B$*? En caso afirmativo, calcule dicho valor.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A - Suplente)

Solución.

a) $A^\top - X \cdot A = 3I_3 \implies X \cdot A = A^\top - 3I_3 \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (A^\top - 3I_3) \cdot A^{-1}$

$$\implies \boxed{X = (A^\top - 3I_3) \cdot A^{-1}}$$

$$|A| = 10 \quad \& \quad \mathrm{Adj}A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 5 \\ -24 & -38 & 30 \\ -22 & -34 & 25 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -24 & -22 \\ -8 & -38 & -34 \\ 5 & 30 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A^\top - 3I_3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^\top - 3I_3) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -24 & -22 \\ -8 & -38 & -34 \\ 5 & 30 & 25 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -65 & -360 & -315 \\ 40 & 220 & 200 \\ -59 & -314 & -267 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -13/2 & -36 & -63/2 \\ 4 & 22 & 20 \\ -59/10 & -157/5 & -267/10 \end{pmatrix}}$$

b) $C^\top \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2 & 2 & -2a - 1 \\ 2a^2 - 3 & 3 & -3a - 2 \\ -a^2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a^2 - 2 & 2 & -2a - 1 \\ 2a^2 - 3 & 3 & -3a - 2 \\ -a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C^\top \cdot D} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \implies \begin{cases} a^2 - 2 = 2 \implies a = \pm 2 \\ -2a - 1 = 3 \implies a = \pm 2 \\ 2a^2 - 3 = 5 \implies a = \pm 2 \\ -3a - 2 = 4 \implies \boxed{a = -2} \\ -a^2 = -4 \implies a = \pm 2 \end{cases}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Una empresa de fumigación sabe que los beneficios, en miles de euros, que obtiene en función de las hectáreas que le encargan fumigar mensualmente viene dada por la expresión

$$B(x) = -x^2 + 16x - 48$$

Además, por problemas de personal, la empresa no puede fumigar más de 10 *hectáreas al mes.*

a) (puntos) ¿Cuántas hectáreas tiene que fumigar al mes para que la empresa tenga beneficios?

b) (0.75 puntos) ¿Cuántas hectáreas tiene que fumigar para obtener el máximo beneficio mensual? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

c) (1 punto) Si un mes ha obtenido un beneficio de 7000€*, ¿cuántas hectáreas ha fumigado?*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B - Suplente)

Solución.

a) $B(x) = -x^2 + 16x - 48 = -(x-4)\cdot(x-12)$

	$(0,4)$	$(4,10)$
Signo $f(x)$	+	-

Teniendo en cuenta que no puede fumigar más de 10 Ha, la empresa tendrá beneficios $(B(x) > 0)$ fumigando entre 4 y 10 Ha.

b) $B'(x) = -2x + 16 = 0 \implies x = 8$

$B''(x) = -2 \implies B''(8) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máximo en $x = 8$

Por lo tanto el máximo beneficio se obtiene fumigando 8 Ha y ascienda a $B(8) = 16 \implies 16000€$.

c) $B(x) = 7 \implies -x^2 + 16x - 48 = 7 \implies x^2 - 16x + 55 = 0 \implies x = \{5, 11\}$, y como no puede fumigar más de 10 Ha, para ganar 7000€ tendrá que fumigar 5 Ha.

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & , \text{ si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$*, con a y b números reales.*

a) (1 punto) ¿Para qué valores de a y b la función es continua y derivable en $x=1$?

b) (0.75 puntos) Para $a=-3$ y $b=4$, calcule los extremos relativos de f.

c) (0.75 puntos) Para $a=-2$ y $b=3$, calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B - Suplente)

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & , \text{ si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & , \text{ si } x > 1 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 2ax+b & , \text{ si } x < 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

a)
- `Continuidad en` $x=1$:
  - $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x=1}(ax^2+bx+1) = a+b+1$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x=1} \frac{2}{x} = 2$
  - $f(1) = a+b+1$

  Para que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \implies a+b+1 = 2 \implies a+b=1$ ⦿
- `Derivabilidad en` $x=1$:
  - $\displaystyle f'\left[1^-\right] = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1}(2ax+b) = 2a+b$
  - $\displaystyle f'\left[1^+\right] = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{2}{x^2}\right) = -2$

  Para que $f'\left[1^-\right] = f'\left[1^+\right] \implies 2a+b=-2$ ⊛

$$\left.\begin{array}{l} ⦿\ a+b=1 \\ ⊛\ 2a+b=-2 \end{array}\right\} \implies \boxed{a=-3} \quad \& \quad \boxed{b=4}$$

b) Para $a=-3$ y $b=4$

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2+4x+1 & , \text{ si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & , \text{ si } x > 1 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} -6x+4=0 \implies x = 2/3 \\ -\dfrac{2}{x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$$

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(2/3, 1)$ y *decreciente* en $(1, +\infty)$, y tiene un *máximo relativo* en $(2/3, 7/3)$.

c) Para $a=-2$ y $b=3 \implies f(x)=\begin{cases} -2x^2+3x+1 & \text{, si } x\leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{, si } x>1 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(-2x^2+3x+1)\,dx + \int_{1}^{3}\frac{2}{x}\,dx = -\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x\Big]_{-1}^{1} + 2\cdot\ln|x|\Big]_{1}^{3}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+1\right) - \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1\right) + 2\cdot\ln 3 - 2\cdot\cancelto{0}{\ln 1} = \frac{2}{3}+\ln 9$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Juan realiza el siguiente juego: Lanza dos dados simultáneamente y si la suma es 2 o mayor que 7, gana y termina el juego. En caso contrario, tiene una segunda y última oportunidad lanzando de nuevo los dos dados y ganaría si la suma es mayor que 9.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane lanzando una sola vez los dados?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane en la segunda oportunidad?

c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque C - Suplente)

Solución.

Sea el suceso:

$$\begin{aligned} G_i \equiv& \text{“Ganar en el lanzamiento } i\text{”} \\ \Omega =& \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ & (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ & (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ & (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ & (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ & (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \\ G_1 =& \{(1,1),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(3,6),(4,5) \\ & (5,4),(6,3),(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\} \\ G_2 =& \{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

a) $P(G_1)=\dfrac{16}{36}=0.4444$

b) $P(\overline{G}_1\cap G_2)=P(\overline{G}_1)\cdot P(G_2)=\dfrac{20}{36}\cdot\dfrac{6}{36}=\dfrac{5}{54}=0.0926$

c) $P(G)=P\Big(G_1\cup(\overline{G}_1\cap G_2)\Big)=P(G_1)+P(\overline{G}_1\cap G_2)=\dfrac{16}{36}+\dfrac{5}{54}=0.537$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Una encuesta realizada a los clientes de un banco muestra que el 60 % de sus clientes tiene un ordenador, el 50 % tiene una tablet y el 20 % posee un ordenador y una tablet. Se elige al azar un cliente de ese banco.

a) Calcule la probabilidad de que:

I) (0.5 puntos) Tenga un ordenador o una tablet.

II) (0.75 puntos) No tenga tablet si no tiene ordenador.

III) (0.75 puntos) Tenga ordenador y no tenga tablet.

b) (0.5 puntos) ¿Son los sucesos "Tener un ordenador" y "Tener una tablet" incompatibles? ¿Son sucesos independientes?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque C - Suplente)

Solución.

Sean los sucesos:

$$O \equiv \text{"El cliente tiene un ordenador"}$$
$$T \equiv \text{"El cliente tiene una tablet"}$$

$$P(O) = 0.6 \qquad \& \qquad P(T) = 0.5 \qquad \& \qquad P(O \cap T) = 0.2$$

a) I) $P(O \cup T) = P(O) + P(T) - P(O \cap T) = 0.6 + 0.5 - 0.2 = 0.9$

II) $P(\overline{T} \mid \overline{O}) = \dfrac{P(\overline{T} \cap \overline{O})}{P(\overline{O})} = \dfrac{P(\overline{T \cup O})}{1 - P(O)} = \dfrac{1 - P(T \cup O)}{1 - P(O)} = \dfrac{1 - 0.9}{1 - 0.6} = 0.25$

III) $P(O \cap \overline{T}) = P(O) - P(O \cap T) = 0.6 - 0.2 = 0.4$

b) $P(O \cap T) = 0.1 \neq 0 \implies$ los sucesos O y T no son incompatibles

$P(O) \cdot P(T) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3 \neq P(O \cap T) \Rightarrow$ los sucesos O y T no son independientes

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Se desea estimar la proporción de personas mayores de 45 años de una determinada ciudad que tienen presbicia (vista cansada). Para ello, se toma una muestra aleatoria de 540 personas mayores de 45 años, obteniéndose que 378 tienen presbicia.

a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97 %, para estimar la proporción poblacional de personas mayores de 45 años con presbicia en dicha ciudad.

b) (1 punto) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuántas personas se deberán seleccionar como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 3 %?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque D - Suplente)

Solución.

a) $n = 540 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{378}{5400} = 0.7 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.3 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.97$

$$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{540}} = 0.0428$$

$$I.C._{97\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(p) = (0.6572; 0.7428)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.3 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.97$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{n}} < 0.03 \implies n \geq \left(\frac{2.17}{0.03}\right)^2 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 1098.94$$

$$\implies \boxed{n = 1099}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

El peso en gramos de las tortugas terrestres de una reserva natural sigue una ley Normal de varianza 121 g^2. Para estimar el peso medio de las tortugas de la reserva, se toma una muestra de 10 tortugas, obteniéndose los siguientes datos:

980 1002 950 985 1100 1085 895 1000 912 1006

a) (1.5 puntos) Halle un intervalo de confianza para el peso medio de las tortugas con un nivel de confianza del 97 %.

b) (1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar con un nivel de confianza del 94 % que el error máximo cometido sea de 5 gramos?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque D - Suplente)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las tortugas (g)”} \xrightarrow{\sigma^2=121} X : \mathcal{N}(\mu, 11)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 11) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{980+1002+950+985+1100+1085+895+1000+912+1006}{10} = 991.5$

$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \dfrac{11}{\sqrt{10}} = 7.55$

$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (983.95; 999.05)}$

b) $n = ? \quad \& \quad E < 5 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.94$

$1 - \alpha = 0.94 \implies \alpha = 0.06 \implies \alpha/2 = 0.03 \implies 1 - \alpha/2 = 0.97 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.88$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \dfrac{11}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(1.88 \cdot \dfrac{11}{5}\right)^2 = 17.11 \implies \boxed{n = 18}$