MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2022
- Ordinario -
- Reserva -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones y realice las que sean posibles.*

$$C \cdot A \qquad \& \qquad A + B \qquad \& \qquad C^{\top} \cdot B^{\top}$$

b) *(1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial* $A \cdot X = B \cdot X + C$

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A - Reserva)

Solución.

a) $\underset{3\times 1}{C} \cdot \underset{3\times 3}{A} \implies$ No se puede operar

$$\underset{3\times 3}{A} + \underset{3\times 3}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{1\times 3}{C^{\top}} \cdot \underset{3\times 3}{B^{\top}} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot X = B \cdot X + C \implies A \cdot X - B \cdot X = C \implies (A - B) \cdot X = C$

$$\implies \underbrace{(A - B)^{-1} \cdot (A - B)}_{I} \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot C \implies \boxed{X = (A - B)^{-1} \cdot C}$$

c) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A - B| = 2$

$$\mathrm{Adj}(A - B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad (A - B)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - B)^{-1} \cdot C = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -11/2 \\ 3 \\ -7/2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Una papelería quiere vender 400 cuadernos de vacaciones y 300 estuches de lápices de colores. Para ello ha preparado dos lotes de esos productos a precios especiales. Los lotes de tipo A contienen 2 cuadernos y 2 estuches; los lotes de tipo B contienen 3 cuadernos y 1 estuche. No es posible vender más de 100 lotes de tipo B. Cada lote de tipo A se vende a 35€ y cada lote de tipo B a 45€. Calcule cuántos lotes de cada tipo debe vender la papelería para conseguir el máximo valor de ventas. ¿A cuánto asciende dicho valor?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque A - Reserva)

Solución.

	Lote tipo A	Lote tipo B	Existencias
Nº Cuadernos	2	3	≤ 400
Nº Estuches	2	1	≤ 300
		≤ 100	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de lotes tipo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de lotes tipo } B\text{”}$$

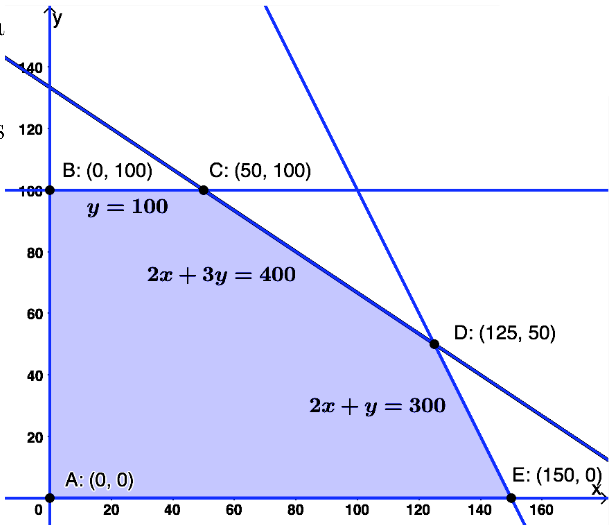
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; 2x + 3y \leq 400 & \to (0, 133) \quad \& \quad (200, 0) \\ ② \; 2x + y \leq 300 & \to (0, 300) \quad \& \quad (150, 0) \\ ③ \; y \leq 100 & \to (0, 100) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 35x + 45y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	100	4500
C	50	100	6250
D	125	50	6625
E	150	0	5250

El *máximo* valor de ventas es de 6625€, vendiendo 125 lotes del tipo A y 50 del tipo B.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 17 & x < -1 \\ \dfrac{1}{3} \cdot (10 - 5x) & -1 \le x \le 2 \\ \dfrac{3}{2} & x > 2 \end{cases}$$

a) *(1.25 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de f.*

b) *(0.5 puntos) Represente gráficamente la función f.*

c) *(0.75 puntos) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x = -2$ y $x = 2$.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B - Reserva)

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 17 & , \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1}{3} \cdot (10 - 5x) & , \text{ si } -1 \le x \le 2 \\ \dfrac{3}{2} & , \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \& \quad f'(x) = \begin{cases} 8x + 16 & , \text{ si } x < -1 \\ -\dfrac{5}{3} & , \text{ si } -1 < x < 2 \\ 0 & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

a) Si $x \neq \{-1, 2\}$ la función $f(x)$ es continua y derivable.

`Continuidad:` Estudiamos la continuidad en las fronteras.

- $x = -1$
  - $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (4x^2 + 16x + 17) = 5$
  - $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{3} \cdot (10 - 5x) = 5$
  - $f(-1) = \dfrac{1}{3} \cdot [10 - 5 \cdot (-1)] = 5$

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \implies f(x)$ es continua en $x = -1$.
- $x = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{3} \cdot (10 - 5x) = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$
  - $f(2) = \dfrac{1}{3} \cdot [10 - 5 \cdot 2] = 0$

  $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \implies$ discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 2$.

`Derivabilidad:` Estudiamos la derivabilidad en las fronteras.

- $x = -1$
  - $f'\left[-1^-\right] = \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} (8x + 16) = 8$

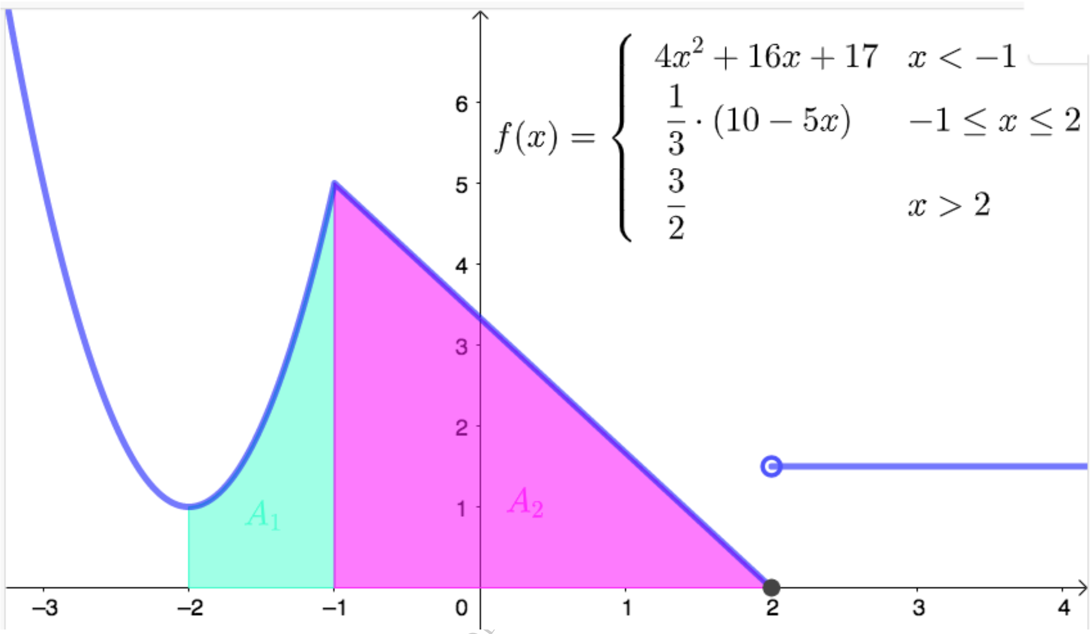
- $f'\left[-1^+\right] = \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1} -\dfrac{5}{3} = -\dfrac{5}{3}$

$f'[-1^-] \neq f'[-1^+] \implies f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

- $x = 2$, la función no es continua, luego no es derivable.

En resumen, la función $f(x)$ es *continua* en $\mathbb{R} - \{2\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

b) La función a trozos está compuesta por un parábola convexa, una recta y una función constante. Las dibujamos dando valores.



c) $Area = \displaystyle\int_{-2}^{-1} f_1(x)\,dx + \int_{-1}^{2} f_2(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (4x^2 + 16x + 17)\,dx + \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}\cdot(10 - 5x)\,dx$

$$= \left.\frac{4x^3}{3} + 8x^2 + 17x\right]_{-2}^{-1} + \left.\frac{10x}{3} - \frac{5x^2}{6}\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{4}{3} + 8 - 17\right) - \left(-\frac{32}{3} + 32 - 34\right)$$

$$+ \left(\frac{20}{3} - \frac{20}{6}\right) - \left(-\frac{10}{3} - \frac{5}{6}\right) = \frac{7}{3} + \frac{15}{2} = \frac{59}{6}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

> *Se considera la función* $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5$.
>
> *a) (1.5 puntos) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a* f *que sean paralelas a la recta de ecuación* $y = -3x + 1$.
>
> *b) (1 punto) Calcule la función* F *que verifique que* $F'(x) = f(x)$ *y* $F(2) = 4$.
>
> *(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque B - Reserva)*

Solución.

a) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5$

$f'(x) = 9x^2 - 12x$

$m_r = f'(x_0) = -3 \implies 9x_0^2 - 12x_0 = -3 \implies 3x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{3} \implies y_0 = f(\frac{1}{3}) = \dfrac{40}{3} \implies y - \dfrac{40}{9} = -3 \cdot \left(x - \dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{y = -3x + \dfrac{49}{9}} \\ x_0 = 1 \implies y_0 = f(1) = 2 \implies y - 2 = -3 \cdot (x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -3x + 5} \end{cases}$$

b) $F'(x) = f(x) \implies F(x) = \displaystyle\int F'(x)\, dx = \int (3x^3 - 6x^2 + 5)\, dx \frac{3x^4}{4} - 2x^3 + 5x + C$

$F(2) = 4 \implies 12 - 16 + 10 + C = 4 \xrightarrow{C=-2} \boxed{F(x) = \dfrac{3x^4}{4} - 2x^3 + 5x - 2}$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

De los sucesos A y B de mismo experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0.7 \qquad \& \qquad P(B) = 0.6 \qquad \& \qquad P(A \cup B) = 0.8$$

Calcule la probabilidad de que:

a) (0.75 puntos) Ocurra A y B.

b) (0.75 puntos) No ocurra ni A ni B.

c) (0.5 puntos) Ocurra A pero no B.

d) (0.5 puntos) Ocurra A sabiendo que no ha ocurrido B

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque C - Reserva)

Solución.

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.7 + 0.6 - 0.8 = 0.5$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$

c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 = 0.2$

d) $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} == \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \dfrac{0.2}{1 - 0.6} = 0.5$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

El porcentaje de conductores que consumen alcohol durante la madrugada del sábado es del 5 %. La policía realiza controles de alcoholemia mediante un test del que se sabe que da positivo en un 96 % si la persona ha bebido alcohol y en un 10 % si la persona no ha bebido alcohol.
Elegido al azar un conductor en la madrugada del sábado y realizado este test de alcoholemia halle la probabilidad de que:

a) (1.25 puntos) Si el test da positivo, el conductor haya consumido alcohol.

b) (0.5 puntos) El test dé negativo y el conductor no haya consumido alcohol.

c) (0.75 puntos) Si el test ha dado negativo, el conductor no haya consumido alcohol.

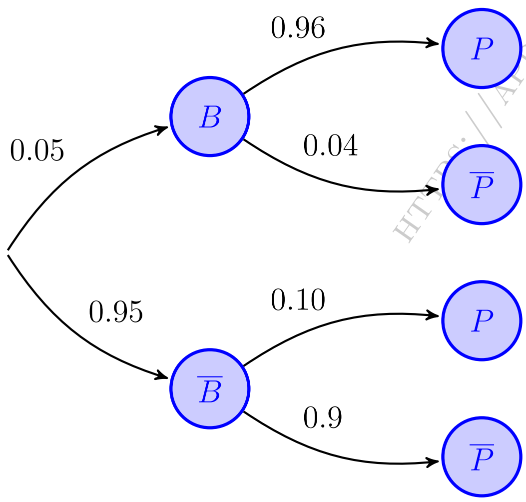
(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque C - Reserva)

Solución.

Sean los sucesos:

$$B \equiv \text{“El conductor ha bebido alcohol”}$$
$$P \equiv \text{“El test de alcoholemia da positivo”}$$

$$\begin{aligned} P(P) &= P\big((B\cap P)\cup(\overline{B}\cap P)\big) = P(B\cap P) + P(\overline{B}\cap P) \\ &= P(B)\cdot P(P\mid B) + P(\overline{B})\cdot P(P\mid \overline{B}) = 0.05\cdot 0.96 + 0.95\cdot 0.10 = 0.143 \end{aligned}$$



a) $$P(B\mid P) = \frac{P(B\cap P)}{P(P)} = \frac{P(B)\cdot P(P\mid B)}{P(P)} = \frac{0.05\cdot 0.96}{0.143} = 0.3356$$

b) $$P(\overline{P}\cap \overline{B}) = P(\overline{B})\cdot P(\overline{P}\mid \overline{B}) = 0.95\cdot 0.9 = 0.855$$

c) $$P(\overline{B}\mid \overline{P}) = \frac{P(\overline{B}\cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{P(\overline{B})\cdot P(\overline{P}\mid \overline{B})}{1-P(P)} = \frac{0.95\cdot 0.9}{1-0.143} = 0.9976$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Un taller desea estimar el grado de satisfacción de sus clientes. para ello, a 120 clientes seleccionados al azar, les pregunta si volverían a solicitar sus servicios en caso de necesitarlo, de los que 96 respondieron que sí lo harían.

a) (1.25 puntos) Determine, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de clientes de este taller que volverían a solicitar sus servicios.

b) (1.25 puntos) Mediante una nueva muestra queremos estimar la proporción de clientes de ese taller que volverían a solicitar sus servicios con un error máximo del 5 % y un nivel de confianza del 97 %. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, ¿qué tamaño mínimo debe tener dicha muestra?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque D - Reserva)

Solución.

a) $n = 120 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{96}{120} = 0.8 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.2 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{120}} = 0.0716$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.7284; 0.8716)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.05 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.97$

$$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{n}} < 0.05 \implies n \geq \left(\frac{2.17}{0.05}\right)^2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 301.37$$

$$\implies \boxed{n = 302}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

El consumo de energía eléctrica mensual por vivienda medido en kilovatios hora (kWh) sigue una distribución Normal con varianza 4225 (kWh^2).

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 100 viviendas obteniéndose un consumo total de 26830 kWh. Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar el consumo medio poblacional.*

b) *(1 punto) Calcule el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar el consumo medio de energía eléctrica mensual por vivienda, con un error máximo de 5 kWh y con un nivel de confianza del 98 %.*

c) *(0.5 puntos) Tras una campaña para incentivar el ahorro energético se toma una nueva muestra y el intervalo de confianza para el consumo medio que se obtiene es $(224.08; 255.92)$. Calcule la media del consumo de energía eléctrica mensual por vivienda para dicha muestra.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Bloque D - Reserva)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo energía eléctrica (kWh)”} \xrightarrow{\sigma^2=4225} X : \mathcal{N}(\mu, 65)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 65) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = \dfrac{26830}{100} = 268.3$

$1-\alpha = 0.92 \implies \alpha = 0.08 \implies \alpha/2 = 0.04 \implies 1-\alpha/2 = 0.96 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.75$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \dfrac{65}{\sqrt{100}} = 11.375$

$I.C._{92\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{92\,\%}(\mu) = (256.925; 279.765)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 5 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.98$

$1-\alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.01 \implies 1-\alpha/2 = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \dfrac{65}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(2.325 \cdot \dfrac{65}{5}\right)^2 = 913.55 \implies \boxed{n = 914}$

c) $\mu = \dfrac{224.08 + 255.92}{2} = 240\ kWh$