MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2021

- Ordinario -

- Suplente -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2021 (Suplente)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) *(0.7 puntos) Calcule* A^{40} *y* $\left(A^\top\right)^{30}$.

b) *(0.6 puntos) Calcule* $(A^{-1}+A)^2$.

c) *(1.2 puntos) Resuleva la ecuación matricial* $\left(A^\top + I_2\right)\cdot X = A^\top - I_2$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A - Suplente)

Solución.

a) $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n \overset{\circledast}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{40} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -40 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(A^\top\right)^{30} = \left(A^{30}\right)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -30 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & -30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\circledast$ Supongamos $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{n+1} = A^n\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n+1) & 1 \end{pmatrix} \text{ q.e.d.}$$

b) $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(A^{-1}+A)^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$

c) $\left(A^\top + I_2\right)\cdot X = A^\top - I_2 \Longrightarrow \underbrace{\left(A^\top + I_2\right)^{-1}\cdot\left(A^\top + I_2\right)}_{I}\cdot X = \left(A^\top + I_2\right)^{-1}\cdot\left(A^\top - I_2\right)$

$\Longrightarrow X = \left(A^\top + I_2\right)^{-1}\cdot\left(A^\top - I_2\right)$

$A^\top + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(A^\top + I_2\right)^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^\top - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$X = \left(A^{\top} + I_2\right)^{-1} \cdot \left(A^{\top} - I_2\right) = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 3y \geq -9 \quad \& \quad x + y \leq 11 \quad \& \quad 6x + y \leq 36 \quad \& \quad x + 2y \geq 6$$

a) (1.5 puntos) Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

b) (0.25 puntos) ¿Pertenece el punto $(5, 7)$ a la región factible anterior?

c) (0.75 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 10x - 6y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A - Suplente)

Solución.

a) ▪ `Restricciones:`
$$\begin{cases} ① \; 5x - 3y \geq -9 & \to (0,3) \quad \& \quad (3,8) \\ ② \; x + y \leq 11 & \to (0,11) \quad \& \quad (11,0) \\ ③ \; 6x + y \leq 36 & \to (0,36) \quad \& \quad (6,0) \\ ④ \; x + 2y \geq 6 & \to (0,3) \quad \& \quad (6,0) \end{cases}$$

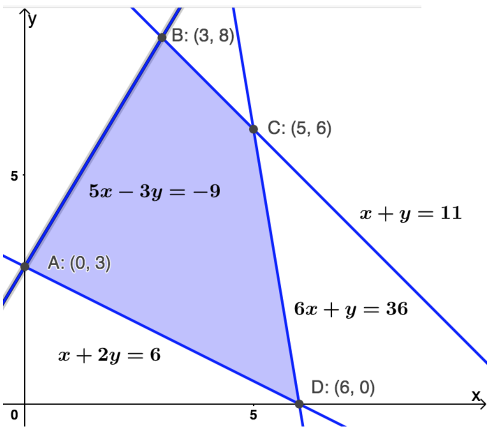
b) Veamos si el punto $P(5, 7)$ pertenece a la región factible:

$$\begin{cases} ① \; 5x - 3y \geq -9 & \to 5 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 4 \geq -9 \; ✓ \\ ② \; x + y \leq 11 & \to 5 + 7 = 12 \not\leq 11 \implies P \notin \text{Región Factible} \end{cases}$$

c) ▪ `Función objetivo` $\quad F(x, y) = 10x - 6y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $F(x, y)$

Punto	x	y	$F(x,y)$
A	0	3	-18
B	3	8	-18
C	5	6	14
D	6	0	60



El *mínimo* de $F(x, y)$ se encuentra en cualquier punto del segmento $\overline{AB}$ y vale -18.
El *máximo* de $F(x, y)$ es de 60 y se produce en el punto $D : (6, 0)$.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \textit{si } x \leq -1 \\ -3x^2 + 4 & , \textit{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & , \textit{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) *(1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en todo su dominio.*

b) *(0.8 puntos) Represente gráficamente la función f.*

c) *(0.7 puntos) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque B - Suplente)

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \text{si } x \leq -1 \\ -3x^2 + 4 & , \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & , \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad \& \qquad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & , \text{si } x < -1 \\ -6x & , \text{si } -1 < x < 1 \\ 2 & , \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, por lo que solo hay que estudiar la continuidad y derivabilidad en las fronteras de la función $x = -1$ y $x = 1$.

- `Continuidad en` $x = -1$
  - $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} = \dfrac{1}{x} = -1$
  - $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (-3x^2 + 4) = 1$
  - $f(-1) = \dfrac{1}{-1} = -1$

  Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, la función $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = -1$. Como la $f(x)$ no es continua en $x = -1$, tampoco es derivable en ese punto.

- `Continuidad en` $x = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-3x^2 + 4) = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x - 1) = 1$
  - $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

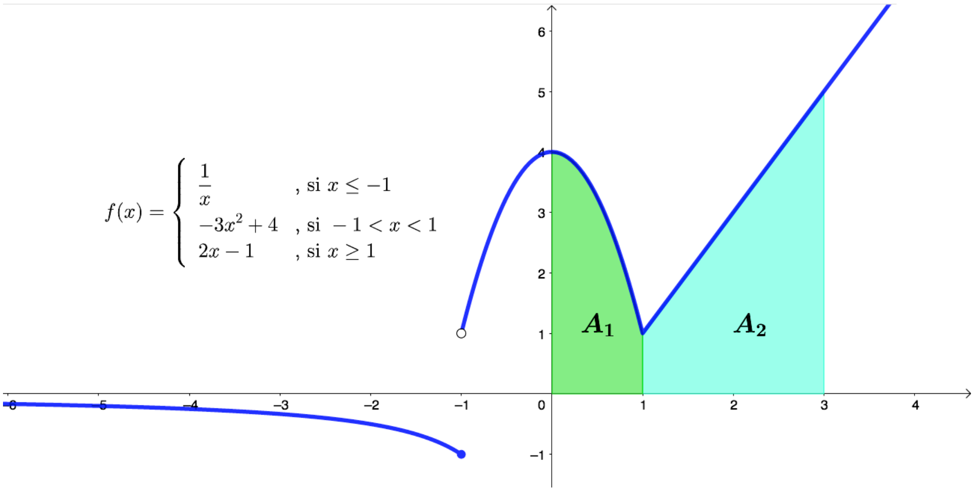
  Como $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$, la función es continua en $x = 1$

- `Derivabilidad en` $x = 1$.
  - $f'(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-6x) = -6$
  - $f'(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2) = 2$

  Como $f(1^-) \neq f(1^+)$, la función no es derivable en $x = 1$.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Representación gráfica de la función:



c) Entre las rectas $x = 0$ y $x = 3 \implies \begin{cases} f_2(x) = -3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \cancel{x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}} \notin (-1, 1) \\ f_3(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cancel{x = \frac{1}{2}} \notin [1, +\infty) \end{cases}$

Lo que define dos recintos de integración: $A_1 : (0, 1)$ y $A_2 : (1, 3)$

$A_1 = \int_0^1 f_2\, dx = \int_0^1 \left(-3x^2 + 4\right) dx = -x^3 + 4x\Big]_0^1 = (-1 + 4) - 0 = 3$

$A_2 = \int_1^3 f_3(x)\, dx = \int_1^3 (2x - 1)\, dx = x^2 - x\Big]_1^3 = (9 - 3) - (1 - 1) = 6$

$Area = |A_1| + |A_2| = 3 + 6 = 9\ u^2$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una fábrica estima que sus costes de producción, expresados en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = x^2 - 6x + 10$, donde x es la cantidad semanal a producir expresada en miles de kilogramos.

a) (1 punto) ¿Cuál debe ser la producción semanal para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es dicho coste?

b) (1.5 puntos) Calcule la recta tangente a la función de costes en el punto de abscisa $x = 4$. Represente gráficamente la función de costes y la recta tangente hallada.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque B - Suplente)

Solución.

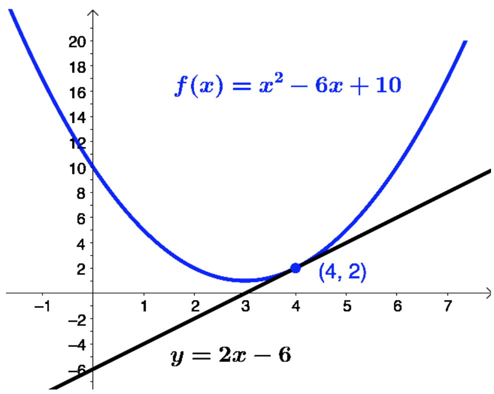
a) $f'(x) = 2x - 6 = 0 \implies x = 3 \qquad \& \qquad f''(x) = 2$

$f''(3) = 2 > 0 \overset{(\cup)}{\implies}$ Mínimo en $x = 3$

El *coste mínimo* se obtiene con una producción de 3000 kilos y asciende a $f(3) = 1$, es decir, 1000 euros.

b) Hallamos la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 4$

$$\begin{aligned} x_0 = 4 &\implies y_0 = f(x_0) = f(4) = 2 \\ &\implies (x_0, y_0) = (4, 2) \\ f'(x) &= 2x - 6 \\ m_r &= f'(x_0) = f'(4) = 2 \\ r \equiv y - y_0 &= m_r \cdot (x - x_0) \\ y - 2 &= 2 \cdot (x - 4) \\ r &\equiv y = 2x - 6 \end{aligned}$$



Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Una determinada ciudad tiene en la plantilla del ayuntamiento 1000 agentes de la policía local, 600 bomberos y 400 funcionarios de protección civil. En esta plantilla, el 42 % de policías, el 20 % de bomberos y el 50 % de funcionarios de protección civil son mujeres. Se elige una persona al azar de la plantilla.

a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) (1 punto) Si la persona elegida es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea bombero?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque C - Suplente)

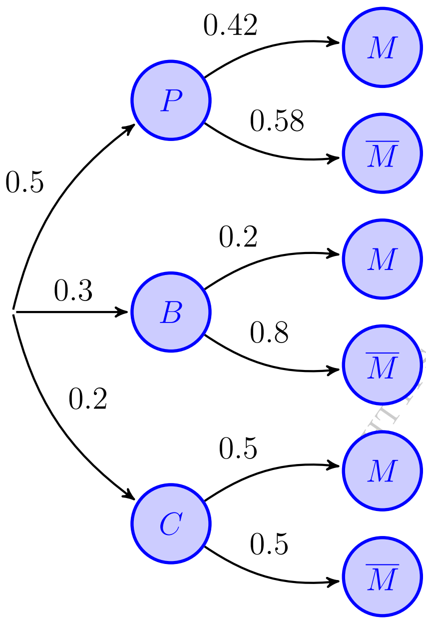
Solución.

Sean los sucesos:

$P \equiv$ "El trabajador es policía local" $\quad B \equiv$ "El trabajador es bombero"

$C \equiv$ "El trabajador es de protección civil" $\quad M \equiv$ "El trabajador es mujer"

$\overline{M} \equiv$ "El trabajador es hombre"



$$P(P) = \frac{1000}{1000+600+400} = 0.5$$

$$P(B) = \frac{600}{2000} = 0.3 \quad \& \quad P(C) = \frac{400}{2000} = 0.2$$

a) $P(M) = P\big((P\cap M)\cup(B\cap M)\cup(C\cap M)\big)$
$= P(P\cap M) + P(B\cap M) + P(C\cap M)$
$= P(P)\cdot P(M \mid P) + P(B)\cdot P(M \mid B)$
$+ P(C)\cdot P(M \mid C) = 0.5\cdot 0.42$
$+ 0.3\cdot 0.2 + 0.2\cdot 0.5 = 0.37$

b) $P(B \mid \overline{M}) = \dfrac{P(B\cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{P(B)\cdot P(\overline{M} \mid B)}{1-P(M)}$
$= \dfrac{0.3\cdot 0.8}{1-0.37} = 0.381$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Una urna A contiene 4 bolas rojas y 5 verdes y otra urna B contiene 6 bolas rojas y 3 verdes. Lanzamos dos dados y si la suma es mayor o igual a 9, extraemos una bola de la urna A y en caso contrario lla extraemos de la urna B.

a) (1.5 puntos) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea verde y de la urna B.

b) (1 punto) Halle la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque C - Suplente)

Solución.

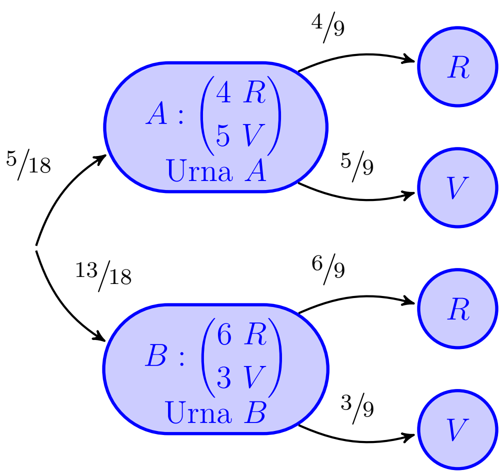
Para calcular la probabilidad de que la suma de los dados sea mayor o igual que 9 vamos a hallar el espacio muestral del experimento "Lanzar dos dados" y la suma de los mismos:

	1	2	3	4	5	6
1	$\{1,1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,5\}$	$\{1,6\}$
2	$\{2,1\}$	$\{2,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{2,5\}$	$\{2,6\}$
3	$\{3,1\}$	$\{3,2\}$	$\{3,3\}$	$\{3,4\}$	$\{3,5\}$	$\{3,6\}$
4	$\{4,1\}$	$\{4,2\}$	$\{4,3\}$	$\{4,4\}$	$\{4,5\}$	$\{4,6\}$
5	$\{5,1\}$	$\{5,2\}$	$\{5,3\}$	$\{5,4\}$	$\{5,5\}$	$\{5,6\}$
6	$\{6,1\}$	$\{6,2\}$	$\{6,3\}$	$\{6,4\}$	$\{6,5\}$	$\{6,6\}$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

De esta forma $P(Suma \geq 9) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$ Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La suma es ≥ 9 (se extrae la bola de la urna A)"
$B \equiv$ "La suma es < 9 (se extrae la bola de la urna B)"
$R \equiv$ "La bola extraída es roja"
$V \equiv$ "La bola extraída es verde"



a) $P(V \cap B) = P(B) \cdot P(V \mid B)$

$$= \frac{13}{18} \cdot \frac{3}{9} = \frac{13}{54} = 0.2407$$

b) $P(R) = P\big((A \cap R) \cup (B \cap R)\big)$

$$= P(A \cap R) + P(B \cap R)$$
$$= P(A) \cdot P(R \mid A)$$
$$+ P(B) \cdot P(R \mid B) = \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{9}$$
$$+ \frac{13}{18} \cdot \frac{6}{9} = \frac{49}{81} = 0.6049$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Se quiere estudiar la proporción de ciudadanos enfermos de COVID-19 *en una determinada población. Para ello, se elige una muestra al azar de* 1000 *ciudadanos, revelándose que el* 15 % *de ellos están enfermos.*

a) (1.5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 95 %*, para estimar la proporción real de enfermos de* COVID-19 *en dicha población.*

b) (1 punto) Determine el tamaño muestral mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de ciudadanos enfermos de COVID-19 *en esa población sea inferior al* 1 %*.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque D - Suplente)

Solución.

a) $n = 1000 \quad \& \quad \hat{p} = 0.15 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.85 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{1000}} = 0.0221$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.1279; 0.1721)}$$

b) $n = ? \quad \& \quad E < 0.01 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} < 0.01 \implies n \geq \left(\frac{1.96}{0.01}\right)^2 \cdot 0.15 \cdot 0.85 = 4898.04$$

$$\implies \boxed{n = 4899}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

El peso de los paquetes de arroz de una marca comercial concreta sigue una ley Normal de media 1000 g y varianza 256 g^2.

a) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que el peso medio de las muestras de tamaño 64 sea menor que 996 g.

b) (1.5 puntos) Tras varias denuncias presentas por falta de peso en los citados paquetes, una organización de consumidores ha procedido a tomar una muestra de 64 paquetes, resultando que la suma de los pesos ha sido de 63744 g. Halle un intervalo de confianza al 90 % para estimar el peso medio real de los paquetes de arroz de esa marca.

c) (0.25 puntos) A la vista del intervalo obtenido y teniendo en cuenta que el peso que marca el paquete es de 1000 g, ¿cree que la denuncia tiene base?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque D - Suplente)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los paquetes de arroz (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(1000, \sqrt{256}) = \mathcal{N}(1000, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(1000, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1000, \dfrac{16}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(1000, 2)$

$$P(\overline{X} < 996) = P\left(z < \frac{996 - 1000}{2}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

b) $X : \mathcal{N}(1000, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = \dfrac{63744}{64} = 996$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{16}{\sqrt{64}} = 3.29$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (992.71; 999.29)}$$

c) Se entiende que la denuncia tiene base suficiente pues en el 90 % de las muestras de paquetes de arroz obtenidas el peso medio será inferior a los 1000 g que marca el paquete.