MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2021
- Ordinario -
- Reserva -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2021 (Reserva)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

a) *(1 punto) Una frutería vende dos tipos de surtidos de frutos rojos, A y B El surtido de tipo A contiene 75 g de arándanos, 100 g de frambuesas y se vende a 2.40 euros, mientras que el de tipo B contiene 75 g de arándanos, 50 g de frambuesas y se vende a 1.80 euros. La frutería dispone de un total de 3.75 kg de arándanos y 4 kg de frambuesas y el número de surtidos que vende del tipo A, siempre es menor o igual al doble de los del tipo B.*
Formule, sin resolver, el problema que permite obtener el número de surtidos de cada tipo que debe vender para que el beneficio sea máximo.

b) *(1.5 puntos) Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices:*

$$x + 4y \geq 5 \qquad \& \qquad x + 2y \geq 4 \qquad \& \qquad 7x + 5y \leq 35 \qquad \& \qquad x \geq 0$$

¿En qué punto de la región anterior la función $F(x, y) = 2x+y$ alcanza el mínimo y cuál es dicho valor?.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A - Reserva)

Solución.

	Surtido tipo A	Surtido tipo B	Existencias
Contenido de arándanos (g)	75	75	3750
Contenido de frambuesas (g)	100	50	4000
Precio venta (euros)	2.4	1.8	
Stock mínimo	$\leq 2y$		

a)
- Incógnitas $x \equiv$ "Nº de surtidos de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de surtidos de tipo B"
- Restricciones:

$$\begin{cases} \textcircled{1}\ 75x + 75y \leq 3750 \\ \textcircled{2}\ 100x + 50y \leq 4000 \\ \textcircled{3}\ x \leq 2y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \textcircled{1}\ x + y \leq 50 \\ \textcircled{2}\ 2x + y \leq 80 \\ \textcircled{3}\ x \leq 2y \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- Función objetivo $f(x, y) = 2.4x + 1.8y \Longrightarrow \text{máx}(f(x, y))$

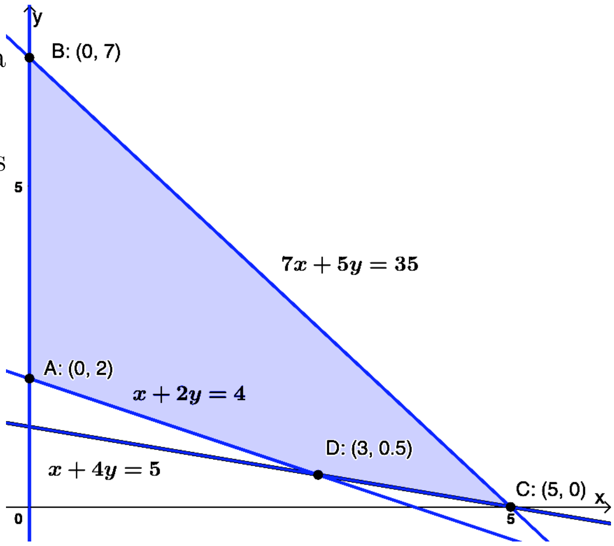
b)
- Restricciones: Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} \textcircled{1}\ x + 4y \geq 5 & \rightarrow (0, 1.25) \quad \& \quad (5, 0) \\ \textcircled{2}\ x + 2y \geq 4 & \rightarrow (0, 2) \quad \& \quad (4, 0) \\ \textcircled{3}\ 7x + 5y \leq 35 & \rightarrow (0, 7) \quad \& \quad (5, 0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Función objetivo $F(x, y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$F(x,y)$
A	0	2	2
B	0	7	7
C	5	0	10
D	3	0.5	6.5



El *mínimo* de $F(x,y)$ es de 2 y se produce en el punto $A:(0,2)$.

○

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Se considera la ecuación matricial $(10I_3 - A)\cdot X = B$*, donde* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ *y* B *es una matriz con tres filas y una columna.*

- a) *(0.5 puntos) Razone qué dimensión ha de tener la matriz* X*.*
- b) *(0.5 puntos) ¿Tiene solución la ecuación matricial anterior para cualquier matriz* B *de orden* 3×1*? ¿Por qué?*
- c) *(1.5 puntos) Resuelva dicha ecuación matricial si* $B = \begin{pmatrix} 5 & 20 & -3 \end{pmatrix}^{\top}$*.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A - Reserva)

Solución.

a) $$\underbrace{\left(\underbrace{10\underbrace{I_3}_{3\times3}-\underbrace{A}_{3\times3}}_{3\times3}\right)\cdot\underbrace{X}_{3\times ?}}_{3\times ?} = \underbrace{B}_{3\times1} \Longrightarrow \boxed{X_{3\times1}}$$

b) $$(10I_3 - A)\cdot X = B \Longrightarrow \underbrace{(10I_3 - A)^{-1}\cdot(10I_3 - A)}_{I}\cdot X = (10I_3 - A)^{-1}\cdot B$$

$$\Longrightarrow X = (10I_3 - A)^{-1}\cdot B \Longrightarrow \exists(10I_3 - A)^{-1} \Longleftrightarrow |10I_3 - A| \neq 0$$

Tal y como se ve en el siguiente apartado $|10I_3 - A| = 300 \neq 0$, por lo que la ecuación matricial tendrá solución para cualquier matriz $B_{3\times1}$

c) $$10I_3 - A = 10\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |10I_3 - A| = 300$$

$$\mathrm{Adj}(10I_3 - A) = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 24 \\ 5 & 40 & 18 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} \Longrightarrow (10I_3 - A)^{-1} = \frac{1}{300}\cdot\begin{pmatrix} 40 & 5 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \\ 24 & 18 & 60 \end{pmatrix}$$

$$X = (10I_3 - A)^{-1}\cdot B = \frac{1}{300}\cdot\begin{pmatrix} 40 & 5 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \\ 24 & 18 & 60 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{300}\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 900 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

———————— ○ ————————

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -2x+2a & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ -2x^2-4a & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ -8x+b & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

a) (1 punto) Calcule los valores a y b para que la función sea continua en su dominio. Para esos valores, ¿es f derivable?

b) (0.8 puntos) Para $a = -2$ y $b = 16$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos y absolutos.

c) (0.7 puntos) Para $a = -2$ y $b = 16$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque C - Reserva)

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \implies$ solo hay que comprobar la continuidad en las fronteras de $f(x)$.

- Continuidad en $x = -2$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(-2x+2a) = 4+2a \\ \bullet \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(-2x^2-4a) = -8-4a \\ \bullet f(-2) = 4+2a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ continua en } x=-2 \\ \iff \lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2) \\ 4+2a = -8-4a \\ \implies \boxed{a=-2} \end{array}\right.$$

- Continuidad en $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(-2x^2-4a\right) = -8-4a = 0 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-8x+b) = -16+b \\ \bullet f(2) = -8-4a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ continua en } x=2 \\ \iff \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \\ 0 = -16+b \\ \implies \boxed{b=16} \end{array}\right.$$

Para $a = -2$ y $b = 16$ la función $f(x)$ es:

$$f(x) = \begin{cases} -2x-4 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ -2x^2+8 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ -8x+16 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -4 < x < -2 \\ -4x & \text{si } -2 < x < 2 \\ -8 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -2 \\ f'(-2^+) = 8 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} f'(-2^-) \neq f'(-2^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = -2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 8 \\ f'(2^+) = 8 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} f'(2^-) = f'(2^+) \\ f(x) \text{ es derivable en } x = -2 \end{array}\right.$$

b) $f'(x) = 0 \implies -4x = 0 \implies x = 0$

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(-4,-2) \cup (0,2) \cup (2,3)$ y *creciente* en $(-2,0)$ y tiene un *máximo relativo* en $(0,8)$.
En los extremos: $f(-4) = 4$ & $f(-2) = 0$ & $f(2) = 0$ & $f(3) = -8$, luego el *mínimo absoluto es* $(3,-8)$ y el *máximo absoluto* es (0.8).

	$(-4,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,3)$
Signo $f'(x)$	-	+	-	-
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗	Decreciente ↘	Decreciente ↘

c) $$f(x) = \begin{cases} -2x-4=0 \implies x=-2 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ -2x^2+8=0 \implies x=\{-2,2\} & \text{si } -2 < x \le 2 \\ -8x+16=0 \implies x=2 & \text{si } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Lo que define un único recinto de integración $A_1 : (-2, 2)$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} (-2x^2+8)\,dx = -\frac{2x^3}{3} + 8x \Big]_{-2}^{2} = \left(-\frac{16}{3}+16\right) - \left(\frac{16}{3}-16\right)$$

$$= \frac{64}{3}$$

$$Area = |A_1| = \frac{64}{3} \simeq 21.33\ u^2$$

* * *

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

a) *(1 punto) Calcule la derivada de las siguientes funciones:*

$$f(x) = \left(5x^3+4x-2\right)^4 \cdot \ln\left(2x^5-4x^3+x\right) \quad \& \quad g(x) = \frac{e^{3x^2-5x}}{(6x^2+2)^3}$$

b) *(1.5 puntos) Halle la función $h(x)$, sabiendo que su derivada es $h'(x) = 4x^3+x^2-4x-1$ y que $h(2) = {}^{11}/_{3}$.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque B - Reserva)

Solución.

a) $$f'(x) = 4\cdot(5x^3+4x-2)^3 \cdot (15x^2+4) \cdot \ln(2x^5-4x^3+x)$$
$$+ (5x^3+4x-2)^4 \cdot \frac{10x^4-12x^2+1}{2x^5-4x^3+x}$$

$$g'(x) = \frac{e^{3x^2-5x}\cdot(6x-5)\cdot(6x^2+2)^{\cancel{3}} - e^{3x^2-5x}\cdot 3 \cdot \cancel{(6x^2+2)^2}\cdot 12x}{(6x^2+2)^{\cancel{6}4}}$$

$$= \frac{(36x^3-30x^2-24x-10)\cdot e^{3x^2-5x}}{(6x^2+2)^4}$$

b) $$h(x) = \int h'(x)\,dx = \int (4x^3+x^2-4x-1)\,dx = x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - x + C$$

$$h(2) = \frac{11}{3} \implies 16 + \frac{8}{3} - 8 - 2 + C = \frac{11}{3} \xrightarrow{C=-5} h(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - x - 5$$

* * *

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio de los que se sabe que:

$$P(A-B)=0.3 \quad \& \quad P(\overline{A})=0.35 \quad \& \quad P(B)=0.55$$

a) (0.8 puntos) Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos.

b) (0.6 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.

c) (0.6 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

d) (0.5 puntos) Razone si los sucesos A y B son independientes.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque C - Reserva)

Solución.

Utilizaremos la notación $P(A\cap\overline{B})=P(A-B)$

a) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.35=0.65$

$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B) \implies P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})=0.65-0.3=0.35$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.65+0.55-0.35=0.85$

b) $P(B\mid\overline{A})=\dfrac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{0.55-0.35}{0.35}=0.5714$

c) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.85=0.15$

d) $P(A\cap B)=0.35$

$P(A)\cdot P(B)=0.65\cdot 0.55=0.3575$

Como $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$, los sucesos A y B no son independientes.

◦

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

En una determinada muestra de suelo se han aislado dos tipos de bacterias, A y B, de las cuales el $70\,\%$ son de A y el $30\,\%$ de B. La probabilidad de que una bacteria de tipo A reaccione a la prueba del nitrato es 0.15 y para la bacteria B es 0.8. De las bacterias aisladas se selecciona una al azar.

a) *(1 punto) Calcule la probabilidad de que reaccione a la prueba del nitrato.*

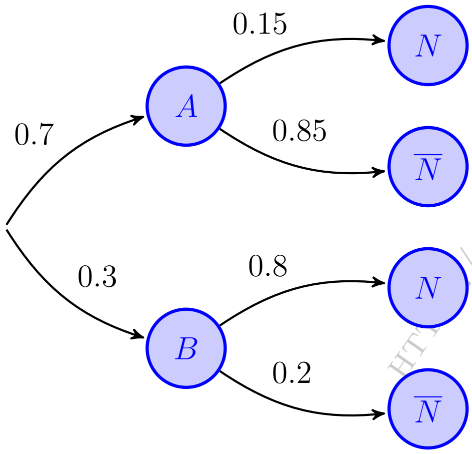
b) *(1 punto) Si la bacteria ha reaccionado a la prueba del nitrato, calcule la probabilidad de que sea del tipo B.*

c) *(0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que la bacteria sea del tipo A y no reacciones a la prueba del nitrato.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque C -Reserva)

Solución. Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La bacteria es del tipo A"
$B \equiv$ "La bacteria es del tipo B"
$N \equiv$ "La bacteria reacciona a la prueba del nitrato"



a) $$P(N) = P\Big((A\cap N)\cup(B\cap N)\Big) = P(A\cap N)+P(B\cap N) = P(A)\cdot P(N\mid A)+P(B)\cdot P(N\mid B) = 0.7\cdot 0.15+0.3\cdot 0.8 = 0.345$$

b) $$P(B\mid N) = \frac{P(B\cap N)}{P(N)} = \frac{P(B)\cdot P(N\mid B)}{P(N)} = \frac{0.3\cdot 0.8}{0.345} = 0.6957$$

c) $$P(A\cap\overline{N}) = P(A)\cdot P(\overline{N}\mid A) = 0.7\cdot 0.85 = 0.595$$

* * *

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

a) (1.25 puntos) Se desea tomar una muestra aleatoria estratificada de las personas de un municipio, cuyos estratos son los siguientes tramos de edad: de 0 *a* 25 *años, de* 26 *a* 45*, de* 46 *a* 60 *y de* 61 *años o más. En el primer tramo hay* 15000 *personas, en el segundo hay* 16800*, en el tercero* 11400 *y en el cuarto* 6000*. Sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido al azar* 375 *personas del primer tramo, calcule el tamaño de la muestra total y su composición.*

b) (1.25 puntos) Dada la población $\{1, 3, 5\}$*, establezca todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y determine la media y la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas estas muestra.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque D - Reserva)

Solución.

a) El total de personas del municipio es $15000 + 16800 + 11400 + 6000 = 49200$

- `tramo 1` $= \dfrac{15000}{49200} \cdot n = 375 \implies n = 1230$ (tamaño muestra)
- `tramo 2` $= \dfrac{16800}{49200} \cdot 1230 = 420$
- `tramo 3` $= \dfrac{11400}{49200} \cdot 1230 = 285$
- `tramo 4` $= \dfrac{6000}{49200} \cdot 1230 = 150$

b) Con la población $\{1, 3, 5\}$, podremos obtener las siguientes muestras con las correspondientes medias.

Muestras de tamaño 2		
$\{1,1\}$	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$
$\{3,1\}$	$\{3,3\}$	$\{3,5\}$
$\{5,1\}$	$\{5,3\}$	$\{5,5\}$

Medias muestrales		
1	2	3
2	3	4
3	4	5

Hacemos una tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
1	1	1	1
2	2	4	8
3	3	9	27
4	2	8	32
5	1	5	25
Σ	9	27	93

$$\text{Media} = \mu = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\text{Desviación típica} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{93}{9} - 3^2} = 1.1547$$

* * *

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Se quiere estimar la proporción de imprentas de una región que incluyen el uso de celulosa reciclada en los libros que imprimen. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 50 imprentas de esa región y en ella hay 12 que usan dicho material.

a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza al 95 %, para estimar la proporción real de imprentas que usan celulosa reciclada.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de la muestra de imprentas de esa región que se deben seleccionar para que, manteniendo el mismo nivel de confianza y proporción muestral anteriores, la amplitud del intervalo sea como máximo de 0.2.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque D - Reserva)

Solución.

a) $n = 50 \quad \& \quad \hat{p} = \frac{12}{50} = 0.24 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.76 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{50}} = 0.1184$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.1216; 0.3584)}$$

b) $n =? \quad \& \quad 2E \le 0.2 \implies E \le 0.1 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{n}} \le 0.1 \implies n \ge \left(\frac{1.96}{0.1}\right)^2 \cdot 0.24 \cdot 0.76 = 70.07$$

$$\implies \boxed{n = 71}$$

* * *