MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2014

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2014
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Hállense los valore de a y b para los que se cumple $A + B + AB = C$.

b) (1 punto) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 2$, determínese la matriz X que verifica $BX - A = I$, donde I es la matriz identidad.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

a) $A + B + AB = C$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3b \\ -2a & ab-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4b \\ -a & ab-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -5 = -5 \checkmark \\ 4b = 4 \Longrightarrow \boxed{b = 1} \\ -a = 1 \Longrightarrow \boxed{a = -1} \\ -2 = ab - 1 \Longrightarrow -2 = -1 \cdot 1 - 1 \checkmark \end{cases}$$

b) $BX - A = I \Rightarrow BX = I + A \Rightarrow \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{I} X = B^{-1} \cdot (I + A) \Rightarrow X = B^{-1} \cdot (I + A)$

$$X = \underbrace{\frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

	Pesqueros	Yates	Restricción
Tiempo reparación (h)	100	50	≤ 1600
	$x \leq 12$	$y \geq 16$	

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Nº de pesqueros reparados"
  $y \equiv$ "Nº de yates reparados"

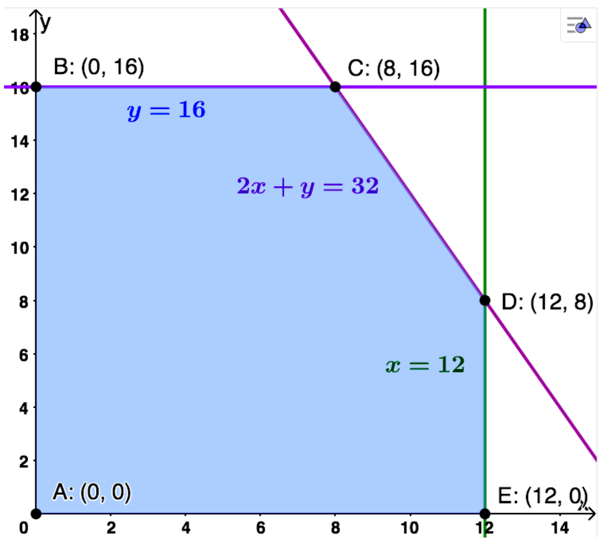
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ 100x + 50y \leq 1600 \\ ② \ x \leq 12 \\ ③ \ y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 2x + y \leq 320 & \to (0,320) \quad \& \quad (160,0) \\ ② \ x \leq 12 & \to (12,0) \\ ③ \ y \leq 16 & \to (0,16) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 50000x + 10000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	16	160000
C	8	16	560000
D	12	8	680000
E	12	0	600000

Por tanto el *ingreso máximo* es de 680000 euros reparando 12 barcos pesqueros y 8 yates.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4}{x+2}-1 & si\ x\leq 0\\[2mm] \dfrac{1}{x+1} & si\ x>0\end{cases}$$

a) *(1 punto) Determínense las asíntotas de la función y los puntos de corte con los ejes.*

b) *(1 punto) Calcúlese* $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

Reescribimos la función $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x-6}{x+2} & \text{si } x\leq 0\\[2mm] \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x>0\end{cases}$$

a) `Corte con los ejes`

$$\text{Eje OX: } y=0 \implies \begin{cases}\dfrac{-x-6}{x+2}=0\Rightarrow -x-6=0\Rightarrow x=-6\leq 0\Rightarrow(-6,0)\\[2mm] \dfrac{1}{x+1}=0\Rightarrow 1=0\Rightarrow\nexists\ \text{Sol.}\end{cases}$$

$$\text{Eje OY: } x=0 \implies y=\frac{-4}{0+2}-1=-3 \implies (0,-3)$$

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador

$$f_1(x)\to x+2=0 \implies x=-2\leq 0\ \checkmark$$
$$f_2(x)\to x+1=0 \implies \cancel{x=-1}<0$$

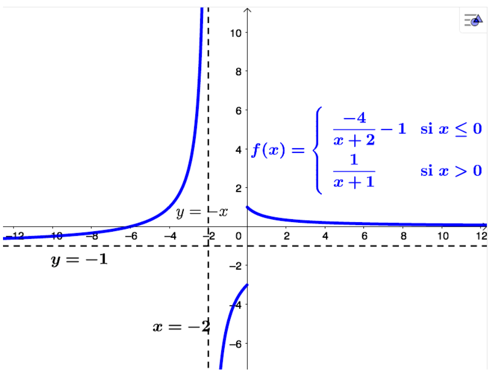
$$\lim_{x\to -2}\frac{-x-6}{x+2}=\left[\frac{-4}{0}\right]=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to-2^-} f(x)=\left[\frac{-4}{0^-}\right]=+\infty\\[2mm] \displaystyle\lim_{x\to-2^+} f(x)=\left[\frac{-4}{0^+}\right]=-\infty\end{cases}$$

- `A. Horizontal`

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-6}{x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=-1\Rightarrow \underset{x\to-\infty}{A.H.}\text{ en } y=-1$$

$$y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0\Rightarrow \underset{x\to-\infty}{A.H.}\text{ en } y=0$$

- `A. Oblicua` Como hay $\underset{x\to\pm\infty}{A.H.} \implies \nexists\ \underset{x\to\pm\infty}{A.O.}$



$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\left(\frac{-4}{x+2}-1\right)dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{x+1}\,dx = -4\ln|x+2| - x]_{-1}^{0} + \ln|x+1|\Big|_{0}^{1}$$

$$= (-4\ln 2 - 0) - \left(-4\cancelto{0}{\ln 1} + 1\right) + \ln 2 - \cancelto{0}{\ln 1} = -4\ln 2 - 1 + \ln 2$$

$$= 1 - 3\ln 2 = 1 - \ln 8$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que la probabilidad de que no ocurra B es 0.6. Si el suceso B ocurre, entonces la probabilidad de que el suceso A ocurra es de 0.4 y si el suceso A ocurre, la probabilidad de que el suceso B ocurra es 0.25. Calcúlese:

a) (0.5 puntos) $P(B)$

b) (0.5 puntos) $P(A \cap B)$

c) (0.5 puntos) $P(A)$

d) (0.5 puntos) $P(A \cup B)$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

Del enunciado sabemos que:

$$P(\overline{B}) = 0.6 \qquad \& \qquad P(A \mid B) = 0.4 \qquad \& \qquad P(B \mid A) = 0.25$$

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$

b) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$

c) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \implies P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B \mid A)} = \dfrac{0.16}{0.25} = 0.64$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.64 + 0.4 - 0.16 = 0.88$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El contenido en alquitrán de una determinada marca de cigarrillos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 4 mg.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 22 mg. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la citada marca.

b) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0.5 mg, con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Contenido en alquitrán (mg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 4)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 22$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{\textit{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} = 1.47$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (20.53; 23.47)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.5 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{\textit{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} < 0.5 \implies n > \left(1.645 \cdot \frac{4}{0.5}\right)^2 = 173.18 \implies \boxed{n = 174}$$

Modelo 2014
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x+6y+z=0 \\ -x+ay+4z=1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Resuélvase para $a=0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & a & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a+3 = 0 \implies a=-3$$

- Si $a \neq -3 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=-3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

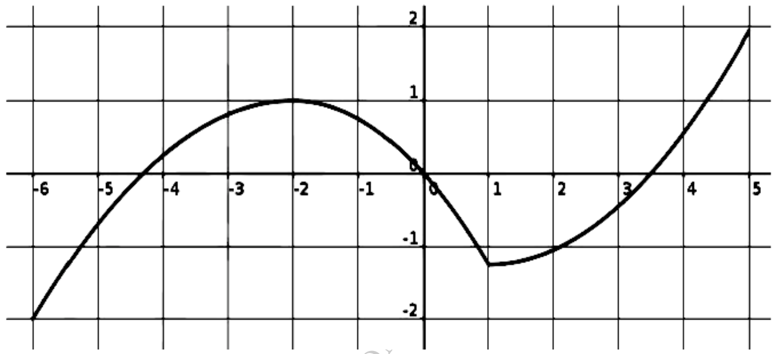
b) Resolvemos el sistema para $a=0$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 3 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + 2 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y + 5 \cdot 2 = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 7 \\ z = 2 \\ y = -8/3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

La figura representa la gráfica de una función $f : [-6, 5] \to \mathbb{R}$. Contéstese razonadamente a las preguntas planteadas.



a) *(0.5 puntos) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?*

b) *(0.5 puntos) ¿En qué puntos del intervalo $[-6, 5]$ f alcanza sus extremos relativos?*

c) *(0.5 puntos) ¿Cuál es el signo de $\int_2^4 f(x)\,dx$?*

d) *(0.5 puntos) ¿En qué valores de $(-6, 5)$ f no es derivable?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

a) $f'(x) > 0$ en el intervalo $(-6, -2) \cup (1, 5)$, ya que es en este intervalo en donde la función es creciente.

b) En $x = 1$ hay un mínimo relativo, mientras que en $x = -2$ hay un máximo relativo. El mínimo absoluto se encuentra en $x = -6$ y el máximo absoluto en $x = 5$.

c) El signo de $\int_2^4 f(x)\,dx$ es < 0, ya que el área limitada por la gráfica de la función y las rectas $x = 2$ y $x = 4$ que está situada por debajo del eje OX es mayor que la situada por encima del mismo.

d) La función f no es derivable en $x = 1$ ya que en ese punto la función hace un pico (la pendiente de la recta tangente a uno y otro lado del punto es distinta).

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & si\ x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - b & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínense los valores de a y b que hacen que f sea continua en $x = 1$ y que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

b) (1 punto) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 4$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

a)

- Si $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \implies -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - b = \frac{1}{4} \implies \boxed{b = 2}$
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(2x^2 - ax + 1) = 3 - a$
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(-x^2 + 3x - 2) = 0$
  - $f(1) = 2 \cdot 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 3 - a$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \implies 3 - a = 0 \implies \boxed{a = 3}$$

b) Para $a = 1$ y $b = 4$ la función será:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$x_0 = 3 \implies y_0 = f(x_0) = f_2(3) = -4$

$\implies (x_0, y_0) = (3, -4)$

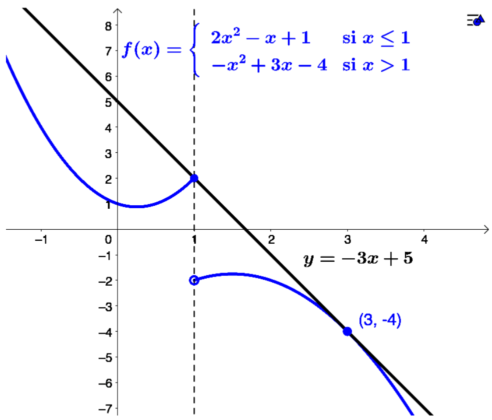
$f_2'(x) = -2x + 3$

$m_r = f'(x_0) = f_2'(3) = -3$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

$y + 4 = -3 \cdot (x - 3)$

$r \equiv y = -3x + 5$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una determinada población, el 30 % de las personas que deciden iniciar una dieta de adelgazamiento utilizan algún tipo de supervisión médica mientras que el 40 % de todas las personas que inician una dieta de adelgazamiento continúan con ella al menos un mes. En esa población, el 80 % de las personas que inician la dieta sin supervisión abandona antes del primer mes.

a) (1 punto) Se escoge al azar a un individuo de esa población del que sabemos que ha iniciado una dieta. ¿Cuál es la probabilidad de que abandonara antes del primer mes y no hubiera tenido supervisión médica?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de las personas que inician una dieta con supervisión médica abandona antes del primer mes?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{“La dieta tiene supervisión médica”}$$
$$A \equiv \text{“El cliente abandona la dieta antes del primer mes”}$$

1ª Forma: Tabla de Contingencia

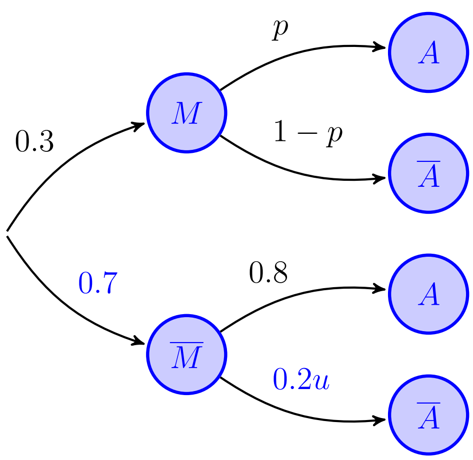
	M	$\overline{M}$	Total
A	0.56	0.56	0.6
$\overline{A}$	0.26	0.14	0.4
Total	0.3	0.7	1

a) $P(A \mid \overline{M}) = \dfrac{P(A \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} \Rightarrow P(A \cap \overline{M}) = P(\overline{M}) \cdot P(A \mid \overline{M})$

$\Longrightarrow P(A \cap \overline{M}) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$

b) $P(A \mid M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0.04}{0.3} = 0.133$

2ª Forma: Diagrama de Arbol



a) $P(A \cap \overline{M}) = P(\overline{M} \cap A) = P(\overline{M}) \cdot P(A \mid \overline{M})$
$= 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$

b) $P(\overline{A}) = P\big((M \cap \overline{A}) \cup (\overline{M} \cap \overline{A})\big)$
$= P(M \cap \overline{A}) + P(\overline{M} \cap \overline{A})$
$= P(M) \cdot P(\overline{A} \mid M) + P(\overline{M}) \cdot P(\overline{A} \mid \overline{M})$
$\Longrightarrow 0.4 = 0.3 \cdot (1-p) + 0.7 \cdot 0.2 \Longrightarrow p = 0.133$
$\Longrightarrow P(A \mid M) = 0.133$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El número de kilómetros recorridos en un día determinado por un conductor de una empresa de transporte se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media μ.

a) (1 punto) Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:

40 28 41 102 95 33 108 20 64

Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ si la variable aleatoria X tiene una desviación típica igual a 30 km.

b) (1 punto) ¿Cuál sería el error de estimación de μ usando un intervalo de confianza con un nivel del 90 %, construido a partir de una muestra de tamaño 4, si la desviación típica de la variable aleatoria X fuera de 50 km?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2014 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Distancia recorrida por un conductor (km/día)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 30) \xrightarrow{n=9} \overline{x} = \dfrac{40+28+41+102+95+33+108+20+64}{9} = 59$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{30}{\sqrt{9}} = 19.6$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (39.4; 78.6)}$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 50) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{50}{\sqrt{4}} = 25\right)$

$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{4}} = 41.125$