MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2017
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2017
Opción A

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$ *, se pide:*

a) *(2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.*

b) *(0.5 puntos) Resolverlo en el caso $a = 1$.*

c) *(0.5 puntos) Resolverlo en el caso $a = 2$.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2 - 4 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$

- Si $a \neq \{-2, 2\}$ $|A| \neq 0 \Longrightarrow$ $\text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incógitas $= 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \; F_2 - 2F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \underset{9F_3 - 4F_2}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 9y - 3 \cdot \frac{4}{3} = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. resolvemos solo las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \underset{F_2 - 2F_1}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 4 \cdot \frac{\lambda}{2} + 3\lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 10y - 5\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda/2 \quad , \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial intentando que los parámetros se sitúen lo más a la derecha y abajo posible, posteriormente aplicamos el método de Gauss al sistema.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right) \sim \; 2F_2 - F_1 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 0 & -8-a & 2a+1 & 2-a \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \underset{(8+a)F_3 + 4F_2}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 0 & -8-a & 2a+1 & 2-a \\ 0 & 0 & -a^2+4 & 8-4a \end{array}\right) \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

- Si $a \neq \{-2, 2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado
- Si $a = -2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

b) Sustituimos el valor del parámetro $a = 1$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & -9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -9y + 3 \cdot \frac{4}{3} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{r} x = -1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{array}}$$

c) Sustituimos el valor del parámetro $a = 2$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado a), teniendo en cuenta de que se trata de un S.C.I. por lo que solo escribiremos las dos primeras filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow 2x + 2\cdot\frac{\lambda}{2} + \lambda = 2 \\ \Rightarrow -10y + 5\lambda = 0 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda/2 \\ z = \lambda \end{array} \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{t=2\lambda} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 - 2t \\ y = t \quad , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dados los puntos $P(1,-2,1)$, $Q(-4,0,1)$, $R(-3,1,2)$, $S(0.-3,0)$, *se pide:*

a) *(1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a* P, Q *y* R.

b) *(1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta* r, *que pasa por los puntos* P *y* Q, *y la recta* s, *que pasa por* R *y* S.

c) *(1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos* P, Q *y* R.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

a) Para hallar el plano π que contiene los puntos P, Q y R obligamos a que el producto mixto $\left[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right]$ valga cero, siendo: $\overrightarrow{PQ} = (-5,2,0)$ y $\overrightarrow{PR} = (-4,3,1)$.

$$\pi \equiv \left[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right] = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow 2\cdot(x-1) + 5\cdot(y+2) - 7\cdot(z-1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + 5y - 7z + 15 = 0}$$

b) Sean las rectas: $r \equiv \begin{cases} P(1,-2,1) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{PQ} = (-5,2,0) \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} R(-3,1,2) \\ \vec{d_s} = \overrightarrow{RS} = (3,-4,-2) \end{cases}$

Como $\vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$ las rectas se cortan en un plano o se cruzan en el espacio. Para determinarlo hallamos $\overrightarrow{PR} = (-4,3,1)$ y el producto mixto:

$$\left[\overrightarrow{PR}, \vec{d_r}, \vec{d_s}\right] = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan}$$

c)
$$Area_{\triangle} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\cdot|(2,5,-7)| = \frac{\sqrt{78}}{2}\ u^2$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

$$c(t) = te^{-t/2} \implies c'(t) = e^{-t/2} - \frac{t}{2}e^{-t/2} = \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{-t/2} = 0 \implies t = 2$$

$$c''(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2} - \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}e^{-t/2} = \left(-1 + \frac{t}{4}\right) \cdot e^{-t/2}$$

$$c''(2) = -\frac{1}{2e} < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{ Hay un máximo en } (2, c(2)) = (2, {}^{2}/{e})$$

Como en el máximo la concentración es $\frac{2}{e} = 0.736 < 1$ el paciente no estará en riesgo pues su concentración es menor que la concentración máxima admisible.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+x+6}{x-2}$, *se pide:*

a) *(0.5 puntos) Determinar su dominio y asíntotas verticales.*

b) *(0.5 puntos) Calcular* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) *(1 punto)1 Calcular* $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Asíntota vertical

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+6}{x-2} = \left[\frac{12}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{12}{0^-} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{12}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+6}{x^2-2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$

c)
$$\int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx = \int_3^5 \left(x+3+\frac{12}{x-2}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 12\cdot\ln|x-2|\Bigg]_3^5 = \left(\frac{5^2}{2} + 3\cdot 5 + 12\cdot\ln|5-2|\right)$$
$$-\left(\frac{3^2}{2} + 3\cdot 3 + 12\cdot\cancelto{0}{\ln|3-2|}\right) = \left(\frac{55}{2} + 12\cdot\ln 3\right) - \left(\frac{27}{2}\right)$$
$$= 14 + 12\cdot\ln 3 \simeq 27.13$$

Junio 2017
Opción B

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x}$ *y* $g(x) = \operatorname{sen} x$, *se pide:*

a) *(1 punto) Calcular* $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) - \dfrac{2}{g(x)}\right)$.

b) *(0.75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva* $y = f(x)$ *en el punto* $(1/2, 4)$.

c) *(1.25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva* $y = f(x)$ *y la recta* $y = -x + 3$.

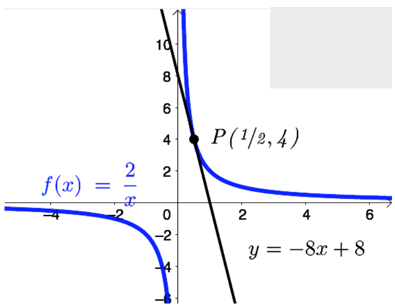
(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) $$\lim_{x\to 0}\left(f(x) - \frac{2}{g(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{\operatorname{sen} x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\operatorname{sen} x - 2x}{x\operatorname{sen} x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$
$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - 2}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0$$

b) Recta tangente a la curva $y = \frac{2}{x}$ en el punto $(1/2, 4)$.

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) &= (1/2, 4)\\
f'(x) &= -\frac{2}{x^2}\\
m_r = f'(x_0) &= f'(1/2) = -8\\
r \equiv y - y_0 &= m_r \cdot (x - x_0)\\
y - 4 &= -8\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\\
r \equiv y &= -8x + 8
\end{aligned}$$



c) Sean las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ & $g(x) = -x + 3$, definimos una nueva función:

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{2}{x} - (-x + 3) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

Y hallamos el área comprendida entre esta función y el eje de abscisas, para lo cual hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x} = 0 \implies x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = \{1, 2\}$$

que define un único recinto de integración $A_1 = (1, 2)$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2-3x+2}{x}\,dx = \int_1^2 \left(x-3+\frac{2}{x}\right)dx \\
&= \left.\frac{x^2}{2}-3x+2\ln|x|\right]_1^2 = (2-6+2\ln 2)-\left(\frac{1}{2}-3+2\cancelto{0}{\ln 1}\right) = -\frac{3}{2}+2\ln 2 \\
Area &= |A_1| = \left|-\frac{3}{2}+2\ln 2\right| = \frac{3}{2}-2\ln 2 \simeq 0.144\ u^2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dadas las matrices:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = PJP^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) El determinante de P es $|P| = 4+8+9-(4+12+6) = -1$.
Hallamos P^{-1} por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}\text{Adj } P^{\top} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $P^{-1}\cdot P = I = P\cdot P^{-1}$

b) Sea la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$, entonces:

$$B^{-1} = \left(J^{-1}\right)^{-1}\cdot\left(P^{-1}\right)^{-1} = JP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $A = PJP^{-1} \implies A^2 = PJ\underbrace{P^{-1}\cdot P}_{I}JP^{-1} = PJ^2P^{-1}$

$$\left|A^2\right| = \left|PJ^2P^{-1}\right| = |P|\cdot\left|J^2\right|\cdot\left|P^{-1}\right| = \cancel{|P|}\cdot|J|^2\cdot\frac{1}{\cancel{|P|}} = (-1\cdot 2\cdot 1)^2 = (-2)^2 = 4$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Determine la distancia entre las rectas*

$$r_1 \equiv x = y = z \quad \& \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

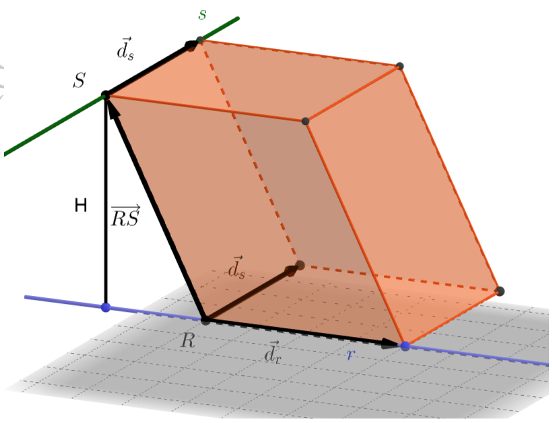
b) *(1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

$$r_1 \equiv \begin{cases} P_1(0,0,0) \\ \vec{d}_{r_1} = (1,1,1) \end{cases} \quad \& \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 1 + x \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \equiv \begin{cases} P_2(0,1,1) \\ \vec{d}_{r_2} = (1,-1,1) \end{cases}$$

a) Para calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan hallaremos la altura del paralelepípedo formado por los vectores directores de ambas rectas y el vector $\overrightarrow{P_1, P_2} = (0,1,1)$.



$$Vol_{paralel.} = A_{base} \cdot H \implies H = \frac{Vol}{A_{base}}$$

Como el volumen del paralelepípedo es $\left|\left[\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right]\right|$ y el área de la base es $\left|\vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2}\right|$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\left[\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right]\right| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = 2 \\ \left|\vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2}\right| \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\| = |(2,0,-2)| = 2\sqrt{2} \end{array}\right\} \implies d(r_1, r_2) = H = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) Hallamos el punto P de corte de la recta s con el plano π, perpendicular a r y que pasa por el origen de coordenadas

$$s \equiv x = 2 - y = z - 1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \& \, \pi \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d}_s = (1,-1,1) \end{cases} \quad \Rightarrow \pi \equiv x - y + z = 0$$

$$\lambda - (2 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0 \implies 3\lambda - 1 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{3} \implies \boxed{P = (1/3, 5/3, 4/3)}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

El 40 % de los sábados Marta va al cine, el 30 % va de compras y el 30 % restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60 % de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20 % de las veces que va de compras, y el 80 % de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

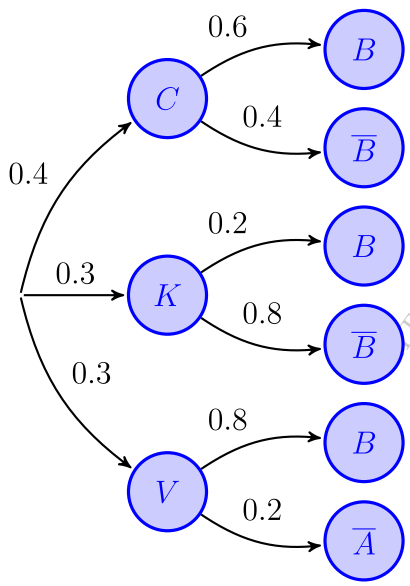
b) (1 punto) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$C \equiv$ "Marta va al cine"
$K \equiv$ "Marta va de compras"
$V \equiv$ "Marta juega videojuegos"
$B \equiv$ "Marta va con sus compañeros de baloncesto"



a) $P(\overline{B}) = P\big((C\cap\overline{B})\cup(K\cap\overline{B})\cup(V\cap\overline{B})\big)$

$$= P(C\cap\overline{B}) + P(K\cap\overline{B}) + P(V\cap\overline{B})$$
$$= P(C)\cdot P(\overline{B}\mid C) + P(K)\cdot P(\overline{B}\mid K)$$
$$+ P(V)\cdot P(\overline{B}\mid V) = 0.4\cdot 0.4$$
$$+ 0.3\cdot 0.8 + 0.3\cdot 0.2 = 0.46$$

b) $P(C\mid B) = \dfrac{P(C\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(C)\cdot P(B\mid C)}{1-P(\overline{B})}$

$$= \frac{0.4\cdot 0.6}{1-0.46} = 0.44$$