MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2017
- Ordinario -
(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2017 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Calcúlese la matriz $D = A^\top \cdot B$. ¿Existe la matriz $F = A \cdot B$?*

b) *(1 punto) Calcúlese la matriz $M = B^{-1}$.*

Nota: $A^\top$ denota la matriz traspuesta de la matriz A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $D = A^\top \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 9 & 26 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz $F = \underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B}$ sin embargo no existe pues no coinciden el número de columnas de A y el de filas de B.

b) $M = B^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 2; \;\; 2x - y \leq 4; \;\; 2y - x \leq 4; \;\; x \geq 0; \;\; y \geq 0$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -5x + 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

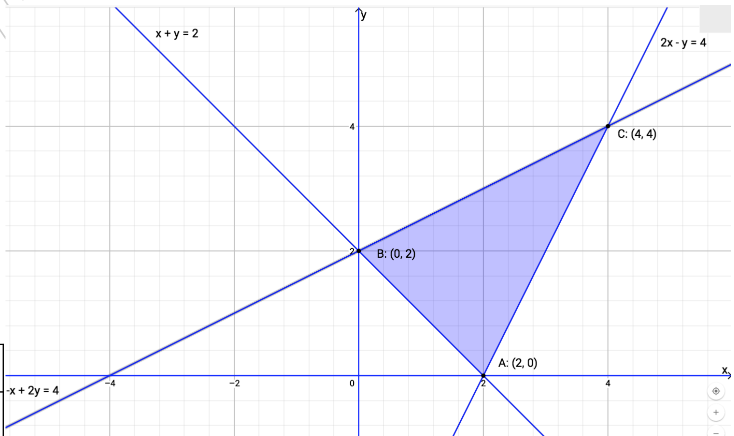
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = -5x + 3y$$

- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \; x + y \geq 2 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (2,0) \\ ② \; 2x - y \leq 4 & \rightarrow (0,-4) \quad \& \quad (2,0) \\ ③ \; 2y - x \leq 4 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (-4,0) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	0	-10
B	0	2	6
C	4	4	-8

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $B(0,2)$ y vale 6, mientras que el *mínimo* se produce en $A(2,0)$ y vale -10.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

a) *(1 punto) Calcúlese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y or las rectas $x = 0$ y $x = 3$.*

b) *(1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

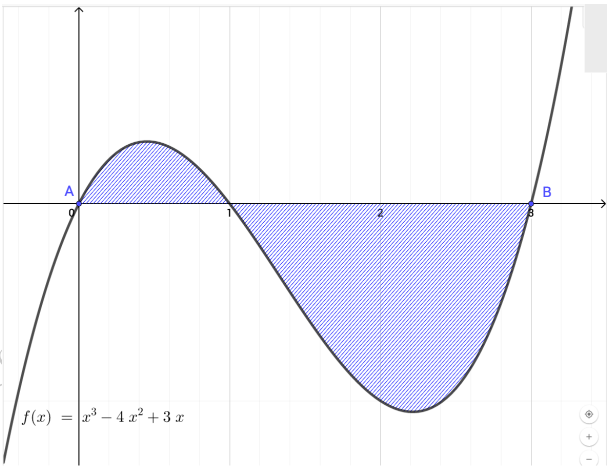
Solución.

a) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX.

$$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3)$$

$$= x(x-1)(x-3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$, planteamos el área teniendo en cuenta que nos piden que esté comprendida entre las rectas $x = -0$ y $x = 3$, por lo que A_1 estará comprendida en el intervalo $(0, 1)$ y A_2 en $(1, 3)$.



$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - (0) = \frac{5}{12}$$

$$A_2 = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_1^3$$

$$= \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{12} - \frac{5}{12} = -\frac{8}{3}$$

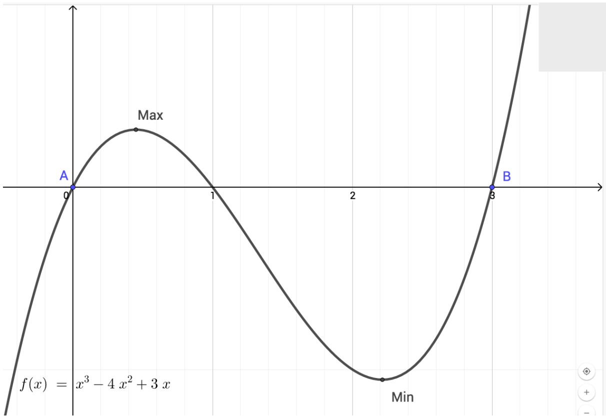
$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ u^2$$

b) Para estudiar el crecimiento de la función hallamos los puntos singulares de la misma y hacemos un estudio del sigo de $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

	$\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$	$\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$	$\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Luego $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ y *decreciente* en $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ y tiene un *máximo* en $x = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ y un *mínimo* en $x = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

El profesorado de cierta Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales está compuesto por profesores de Economía y de Empresa. El 60 % son de Economía y el 40 % de Empresa. Además el 55 % del profesorado de esa facultad son mujeres. De ellas, el 52 % son de Empresa. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado de dicha Facultad elegido al azar:

a) (1 punto) Sea una mujer si se sabe que es de Empresa.

b) (1 punto) Sea de Economía y sea mujer.

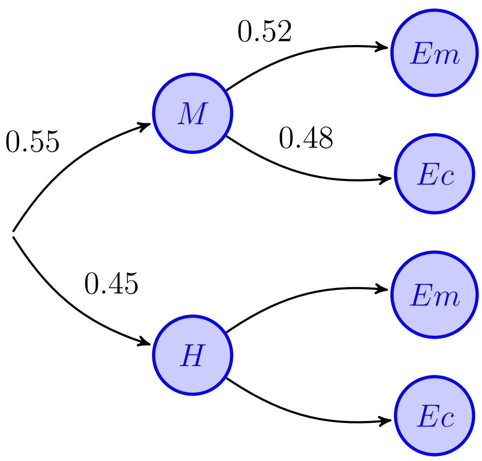
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$Ec \equiv$ "El profesor es de Economía" $\qquad Em \equiv$ "El profesor es de Empresa"

$M \equiv$ "El profesor es mujer" $\qquad H \equiv$ "El profesor es hombre"



$$P(Ec) = 0.6 \implies P(Em) = 1 - P(Ec) = 0.4$$

a) $$P(M \mid Em) = \frac{P(M \cap Em)}{P(Em)} = \frac{P(M) \cdot P(Em \mid M)}{P(Em)} = \frac{0.55 \cdot 0.52}{0.4} = 0.715$$

b) $$P(Ec \cap M) = P(M \cap Ec) = P(M) \cdot P(Ec \mid M) = 0.55 \cdot 0.48 = 0.264$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La producción diaria de cemento, medida en toneladas, de una factoría cementera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 9$ toneladas.

a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 2 toneladas.

b) (1 punto) Se toman los datos de producción de 16 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\overline{X}$, sea menor o igual a 197.5 toneladas si sabemos que $\mu = 202$ toneladas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 9) \qquad n = ? \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

La amplitud del tintervalo ha de ser menor que 2, por lo que $2E \leq 2$

$$2E \leq 2 \implies 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2 \implies 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \leq 2$$
$$\implies n \geq \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{9}{2}\right)^2 = 311.17 \implies \boxed{n = 312}$$

b) $X : \mathcal{N}(202, 9) \quad \overset{n=16}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(202, 9/\sqrt{16}) = \mathcal{N}(202, 2.25)$

$$P\left(\overline{X} \leq 197.5\right) = P\left(Z \leq \frac{197.5 - 202}{2.25}\right) = P(Z \leq -2)$$
$$= P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Junio 2017 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+3y+3z &=& 0 \\ -x+3y+z &=& 1 \\ -x+ay+2z &=& 0 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right)$$

1) Método de Gauss

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right) \sim C_2 \leftrightarrow C_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-6 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow 2a - 6 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \times & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).
- Si $a = 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

2) Método Rouché-Frobenius

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 6 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -x + 3(1/4) + 3(-1/2) = 0 \\ -2z = 1 \\ -2y - (-1/2) = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3/4 \\ y = 1/4 \\ z = -1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 5x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Determínese si la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.*

b) *(1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) (1) Para que una función sea derivable ha de ser continua así que comprobamos primero la continuidad en $x = 1$.

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(x^2 + 5x + 1\right) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(5x + 1) = 1$
- $f(0) = 5 \cdot 0 + 1 = 1$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 0$.

(2) Estudiemos la derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} f'(0^-) = 5 \\ f'(0^+) = 5 \end{array}$$

Luego $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) El punto de tangencia es $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = f(3) = 3^2 + 5 \cdot 3 + 1 = 25$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 5 \\ m_r &= f'(x_0) = f'(3) = 11 \\ r &\equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \\ r &\equiv y - 25 = 11 \cdot (x - 3) \implies \boxed{r \equiv y = 11x - 8} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = x^2 + 8x + 15$$

a) (1 punto) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 1/3$.

b) (1 punto) Determínense los máximos y los mínimos locales de $f(x)$, si los tuviese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\displaystyle\int f'(x)\,dx = \int \left(x^2 + 8x + 15\right) dx = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x + k$

$\displaystyle f(1) = \frac{1}{3} \implies \frac{1}{3} + 4 + 15 + k = \frac{1}{3} \implies k = -19$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x - 19$$

b) $f'(x) = x^2 + 8x + 15 = 0 \implies x = -3$ y $x = -5$

$$f''(x) = 2x + 8 \implies \begin{cases} f''(-3) = 2 > 0 & \xRightarrow{(\cup)} \text{Minimo en } (-3, -37) \\ f''(-5) = -2 < 0 & \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } (-5, {}^{-107}/_{3}) \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una máquina tiene dos chips de control A y B. Se sabe que al encender la máquina la probabilidad de que falle el chip A es de 0.2, la probabilidad de que falle el B es de 0.3 y la probabilidad de que fallen los dos es de 0.015. Calcúlese la probabilidad de que al encender la máquina:

a) (1 punto) Haya fallado el chip A si se sabe que ha fallado el B.

b) (1 punto) No falle ninguno de los dos chips.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“Falla el chip A”} \qquad\qquad B \equiv \text{“Falla el chip B”}$$

$$P(A) = 0.2 \quad \& \quad P(B) = 0.3 \quad \& \quad P(A \cap B) = 0.015$$

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.015}{0.3} = 0.05$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$
$= 1 - (0.2 + 0.3 - 0.015) = 0.515$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso, en gramos (gr), de la bandeja de salmón crudo que se vende en una gran superficie, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ gr. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 10 bandejas.

a) (1 punto) Si la media muestral de los pesos ha sido $\overline{X} = 505$ gr, calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) (1 punto) Supóngase ahora que $\mu = 500$ gr. Calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 10 bandejas sea mayor o igual a 5030 gr.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 25) \xrightarrow{n=10} \overline{X} = 505$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \implies z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 20.36$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (484.64; 525.36)}$$

b) $X : \mathcal{N}(500, 25) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}(500, 25/\sqrt{10}) = \mathcal{N}(500, 7.91)$

$$P\left(10\overline{X} \geq 5030\right) = P\left(\overline{X} \geq 503\right) = P\left(Z \geq \frac{503-500}{7.91}\right) = P(Z \geq 0.38)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.38) = 1 - 0.6480 = 0.3520$$