MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2023

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2023

Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}. \textit{ Se pide:}$$

a) *(0.75 puntos) Calcular el valor de m para el cual se verifica que $A^\top B = C$.*

b) *(1 punto) Calcular los valores de m para los cuales existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.*

c) *(0.75 puntos) Calcular el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a) $A^\top B = C \implies \begin{pmatrix} m & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-2 & -m \\ -2m & 1 \\ 3m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\implies \begin{cases} 2m^2 - 2 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{m = -1} \\ \boxed{m = 1} \end{cases} \\ -m = -1 \implies m = 1 \checkmark \\ -2m = -2 \implies m = 1 \checkmark \\ 1 = 1 \checkmark \end{cases}$$

b) $AC = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & -m+2 \end{pmatrix}$

$|AC| = 3m^2 + m + 10 = 0 \implies \nexists$ Solución $\implies \exists (AC)^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R}$

Si $m = 0 \Rightarrow AC = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (AC)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (AC)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = B - I \implies \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4m^2 - 1 = 2m - 1 \implies \begin{cases} \cancel{m = 0} \\ \boxed{m = 1/2} \end{cases} \\ -2m = -1 \implies m = 1/2 \checkmark \\ 2m = 1 \implies m = 1/2 \checkmark \\ -1 = -1 \checkmark \end{cases}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Para la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe-e}{e^x-e} & , \text{ si } x<1 \\ \dfrac{1}{4x-3} & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ *, se pide:*

a) *(1.5 puntos) Estudiar su continuidad y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Calcular* $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{f(x)}\, dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a) `Continuidad de` $f(x)$

- Si $x<1,\ f(x) = \dfrac{xe-e}{e^x-e}$, continua en $\mathbb{R}-\{1\}$, luego continua en $x<1$.
- Si $x>1,\ f(x) = \dfrac{1}{4x-3}$, continua en $\mathbb{R}-\{3/4\}$, luego continua en $x>1$.
- Si $x=1$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{xe-e}{e^x-e} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}p}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e}{e^x} = \frac{e}{e} = 1$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{4x-3} = \frac{1}{4-3} = 1$
  - $f(1) = \dfrac{1}{4-3} = 1$

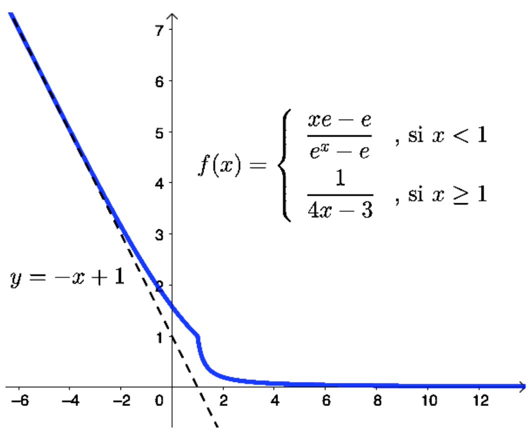
  $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \implies f(x)$ es continua en $x=1$
- `A. Vertical` $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y además la función es continua en $\mathbb{R}$, por lo que $f(x)$ no tiene A. Vertical.
- `A. Horizontal`

  $$y = \lim_{x\to -\infty} \frac{xe-e}{e^x-e} = \frac{-\infty}{0-e} = +\infty \Rightarrow \nexists \underset{x\to-\infty}{A.H.}$$

  $$y = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{4x-3} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow \underset{x\to+\infty}{A.H.} \text{ en } y=0$$

- `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx+n$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe-e}{xe^x-xe} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$\overset{L'H\hat{o}p}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{(x+1)e^x-e} = \frac{e}{0-e} = -1$$
$$n = \lim_{x\to-\infty} \Big[f(x)-mx\Big] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{xe-e}{e^x-e} + x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{xe} - e + xe^x - \cancel{xe}}{e^x-e} = \frac{-e+0}{0-e} = 1$$



Luego $\exists \underset{x\to-\infty}{A.O.}$ en $y = -x+1$.

b) $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{f(x)}\,dx = \int_1^5 \sqrt{\frac{1}{4x-3}}\,dx = \int_1^5 (4x-3)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int_1^5 \underbrace{4}_{u'}\cdot\underbrace{(4x-3)^{-1/2}}_{u^{-1/2}}\,dx$

$$\left.\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{4x-3}\right]_1^5 = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1,1,1)$ y $B(1,3,1)$. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x-3z=1$ y el vértice sobre el punto A es $A'(1,1,6)$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA'.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

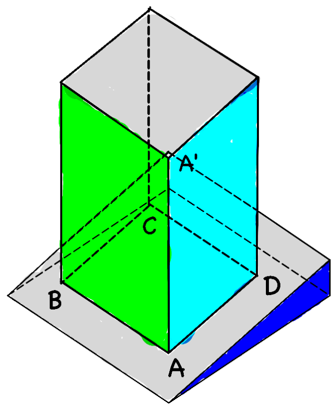
(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a) $\pi' \equiv \begin{cases} A(1,1,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AA'} = (0,0,5) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0,2,0) \end{cases}$

$$\Longrightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow -10\cdot(x-1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\pi' \equiv x = 1}$$



b) Como la base está en el plano $\pi \equiv 4x-3z=1 \Longrightarrow \overrightarrow{AD} \perp \vec{n}_\pi$
Como la base es un cuadrado $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ & $|AD| = |AB| = \sqrt{0+2^2+0} = 2$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AD} \perp \vec{n}_\pi \\ \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{AD} = \lambda\cdot(\overrightarrow{AB}\times\vec{n}_\pi) = \lambda\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \lambda\cdot(-9,0,-12)$$

$$|AD| = 2 \Longrightarrow \sqrt{225\lambda^2} = 2 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -2/15 \Longrightarrow \overrightarrow{AD} = \left(\frac{6}{5},0,\frac{8}{5}\right) \\ \lambda = +2/15 \Longrightarrow \overrightarrow{AD} = \left(-\frac{6}{5},0,-\frac{8}{5}\right) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A \Rightarrow D = A + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = (1,1,1) + \left(\frac{6}{5},0,\frac{8}{5}\right) \Rightarrow \boxed{D_1 = \left(\frac{11}{5},1,\frac{13}{5}\right)} \\ D_2 = (1,1,1) + \left(-\frac{6}{5},0,-\frac{8}{5}\right) \Rightarrow \cancel{D_2 = \left(-\frac{1}{5},1,-\frac{3}{5}\right)} \end{cases}$$

Hemos descartado el punto D_2 ya que su coordenada $z < 0$, lo que supone que estaría bajo el suelo del local.

$$C = B + \overrightarrow{AD} = (1,3,1) + \left(\tfrac{6}{5}, 0, \tfrac{8}{5}\right) \implies \boxed{C = \left(\frac{11}{5}, 3, \frac{13}{5}\right)}$$

c) $$Vol = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}\right]\right| = \left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 6/5 & 2 & 8/5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}\right| = |-12| = 12\ u^3$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $\mathcal{N}(100, 35)$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0.75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75.17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Puntuación de los empleados”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(100, 35)$$

a) $$P(100 \le X \le 140) = P\left(\frac{100-100}{35} \le Z \le \frac{140-100}{35}\right) = P(0 \le Z \le 1.14)$$
$$= P(Z \le 1.14) - P(Z \le 0) = 0.8729 - 0.5 = 0.3729 \Rightarrow 37.29\,\%$$

b) $$P(X < 95) = P\left(Z < \frac{95-100}{35}\right) = P(Z < -0.14) = P(Z > 0.14)$$
$$= 1 - P(Z < 0.14) = 1 - 0.5557 = 0.4443$$

c) Sea a la puntuación superada por el 75.17 % de los trabajadores

$$P(X > a) = 0.7517 \implies P\left(Z > \frac{a-100}{35}\right) = 0.7517$$
$$\implies P\left(Z < \frac{-a+100}{35}\right) = 0.7517 \implies \frac{-a+100}{35} = 0.68 \implies \boxed{a = 76.2}$$

Modelo 2023
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + az = -1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ 3x - y + 4z = -1 \end{cases}$$

a) *(2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.*

b) *(0.5 puntos) Resuelva el sistema obteido para aquellos valores de a en los que tenga infinitas soluciones.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -3a^2 + 3a = -3a \cdot (a-1) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

- Si $a \neq \{0,1\}$ $|A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - \lambda + 2 - 2\lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\lambda + z = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x = -3 + 3\lambda & \\ y = \lambda & , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2\lambda & \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & , \textit{si } x > 1 \\ \dfrac{x}{|x|} & , \textit{si } x \leq 1 \textit{ y } x \neq 0 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie su dominio y su continuidad.

b) (1 punto) Estudie su crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos.

c) (1 punto) Determine las ecuaciones de las asíntotas, si existieran.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & , \text{si } x > 1 \\ \dfrac{x}{|x|} & , \text{si } x \leq 1 \text{ y } x \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{x}{-x} = -1 & , \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x} = 1 & , \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x-1} & , \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) `Continuidad de` $f(x)$: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, por lo que solo es necesario estudiar la continuidad en las fronteras de la función.

- `Continuidad en` $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} -1 = -1$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$
  - $f(0) \nexists$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 0$.

- `Continuidad en` $x = 1$
  - $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 1 = 1$
  - $\lim_{x\to 1^+ f(x)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$
  - $f(1) = 1$

  Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 1$.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

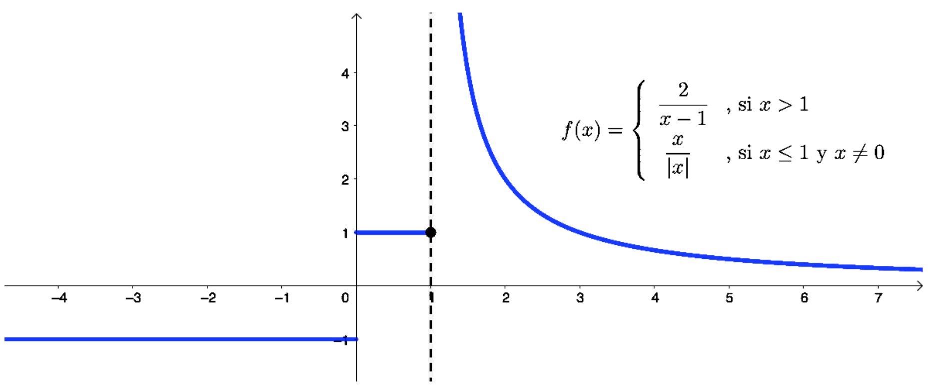
b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{-x} = -1 & , \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x} = 1 & , \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x-1} & , \text{si } x > 1 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x < 0 \\ 0 & , \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -\dfrac{2}{(x-1)^2} & , \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si $x < 0$ la función $f_1(x) = -1$ es una recta horizontal y todos sus puntos son extremos relativos.
- Si $0 < x < 1$ la función $f_2(x) = 1$ es una recta horizontal y todos sus puntos son extremos relativos.
- Si $x > 1$ la función $f_3(x) = \dfrac{2}{x-1} \implies f_3'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2} \neq 0 \ \forall x > 1$, luego no tiene extremos relativos.
  $f_3'(x) < 0 \implies f(x)$ es *decreciente* en $(1, +\infty)$.

La función no tiene *máximos absolutos* y el *mínimo absoluto* es cualquier punto de $(-\infty, 0)$.

c)
- `Asíntos Vertical:` $\exists \underset{x\to 1^+}{A.V.} \to +\infty$
- `Asíntota Horizontal:` Como $f_1(x)$ es una rama constante, la única opción está en f_3.

  $$y = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x-1} = 0 \implies \exists \underset{x\to +\infty}{A.H.} \text{ en } y = 0$$
- `Asíntota Oblicua:` No hay en $f_1(x)$ porque es una recta horizontal, ni en $f_3(x)$ porque $\exists \underset{x\to +\infty}{A.H.}$



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se consideran las siguientes rectas:

- *r, la recta que pasa por el punto $P(1,1,2)$ y tiene como vector director $\vec{u}=(0,1,2)$;*
- *s, la recta de ecuaciones implítas $s \equiv \begin{cases} x+y-4=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$*
- *t, la recta paralela a s que contiene al punto P.*

a) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

b) (0.75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} P(1,1,2) \\ \vec{d_r} = \vec{u} = (0,1,2) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} S(4,0,3) \\ \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2,2,-1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 4-2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$$

$$t \equiv \begin{cases} P(1,1,2) \\ \vec{d_t} = \vec{d_s} = (-2,2,-1) \end{cases}$$

a) $\vec{d_r} \nparallel \vec{d_s} \implies r$ y s se cortan en un plano o se cruzan en el espacio.

$$\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{PS}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan en el espacio}$$

b) $$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{d_r} \cdot \vec{d_t}\right|}{\left|\vec{d_r}\right| \cdot \left|\vec{d_t}\right|} = \frac{|0+2-2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9}} = 0 \implies \boxed{\alpha = 90^\circ}$$

c) $$\pi \perp s \implies \pi \equiv \begin{cases} P(1,1,2) \\ \vec{n_\pi} = \vec{d_s} = (-2,2,-1) \end{cases} \implies \pi \equiv -2x+2y-z+D=0$$

$$\xrightarrow{P\in\pi} -2+2-2+D=0 \xrightarrow{D=2} \pi \equiv -2x+2y-z+2=0$$

$$\left.\begin{array}{l} P' = s \cap \pi \\ P' \in s \end{array}\right\} \implies -2\cdot(4-2\lambda)+2\cdot(2\lambda)-(3-\lambda)+2=0 \xrightarrow{\lambda=1} \boxed{P'(2,2,2)}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Tras reiteradas denuncias por venta de falsificaciones, la inspección aduanera decide examinar sistemáticamente las remesas de dos productos de una determinada marca de lujo. Se encuentra que por término medio el 5 % y el 2 % de las muestras respectivas resulta ser falso. Al abrir un contenedor se encuentra que el 30 % de las piezas son del producto A y el resto, del producto B.

a) (0.75 puntos) Se toma una pieza al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que resulte falsa?

b) (0.5 puntos) Sabiendo que la pieza es falsa, ¿qué probabilidad existe de que sea del primer tipo?

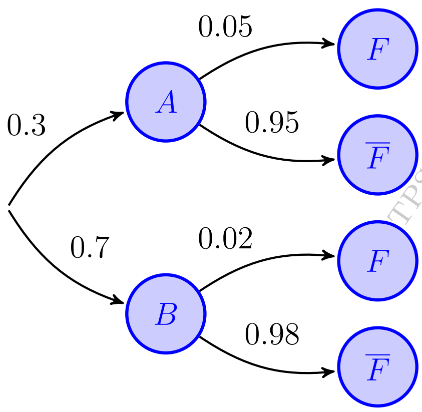
c) (1.25 puntos) Se controla un lote de 1000 piezas del tipo A. Se toma la variable aleatoria "número de piezas falsas". Calcule la probabilidad $P(48 \leq X \leq 52)$ aproximando la distribución resultante mediante una normal.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La muestra del contenedor es del producto } A\text{”}$$
$$B \equiv \text{“La muestra del contenedor es del producto } B\text{”}$$
$$F \equiv \text{“El producto examinado es falso”}$$



a)
$$\begin{aligned} P(F) &= P\big((A\cap F)\cup(B\cap F)\big) \\ &= P(A\cap F)+P(B\cap F) \\ &= P(A)\cdot P(F\mid A)+P(B)\cdot P(F\mid B) \\ &= 0.3\cdot 0.05+0.7\cdot 0.02 = 0.029 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(A\mid F) &= \frac{P(A\cap F)}{P(F)} = \frac{P(A)\cdot P(F\mid A)}{P(F)} \\ &= \frac{0.3\cdot 0.05}{0.029} = 0.51721 \end{aligned}$$

c) $X \equiv$ “Nº de piezas defectuosas del producto A” $\longrightarrow X : \mathcal{B}(1000, 0.05)$

$$X : \mathcal{B}(1000,0.05) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 1000 > 20 \\ np = 50 > 5 \\ nq = 950 > 5 \end{array} \right\} \xRightarrow[Moivre]{Th.} Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(50, 6.892)$$

$$\begin{aligned} P(48 \leq X \leq 52) &= P(47.5 \leq Y \leq 52.5) = P\left(\frac{47.5-50}{6.892} \leq Z \leq \frac{52.5-50}{6.892}\right) \\ &= P(-0.36 \leq Z \leq 0.36) = P(Z \leq 0.36) - P(Z \leq -0.36) \\ &= P(Z \leq 0.36) - P(Z \geq 0.36) = P(Z \leq 0.36) - \big[1 - P(Z \leq 0.36)\big] \\ &= 2P(Z \leq 0.36) - 1 = 2\cdot .6406 - 1 = 0.2812 \end{aligned}$$