MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2022

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2022
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60 % del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Nº de alumnos matriculados en } \textbf{inglés}\text{"}$$
$$y \equiv \text{"Nº de alumnos matriculados en } \textbf{francés}\text{"}$$
$$z \equiv \text{"Nº de alumnos matriculados en } \textbf{alemán}\text{"}$$

$$\begin{cases} x = 0.6 \cdot (x+y+z) \\ y - 10 = z + 10 \\ \dfrac{x}{4} = 2 \cdot (y-z) + 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 \\ y - z = 20 \\ x - 8y + 8z = 32 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 1 & -8 & 8 & 32 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & -13 & 19 & 64 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 13F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 324 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x - 3\cdot 74 - 3 \cdot 54 = 0 \\ \Rightarrow y - 54 = 20 \\ \Rightarrow 6z = 324 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 192 \\ y = 74 \\ z = 54 \end{array}}$$

£

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x \cdot e^{4-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0, \infty)$

c) (0.75 puntos) Calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a)
- Continuidad en $x = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1} = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot e^{4-x^2} = 0$
  - $f(0) = 0 \cdot e^{4-0} = 0$

  Como $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.
- Derivabilidad en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x - x \cdot \cos x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ (1 - 2x^2) \cdot e^{4-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  - $\displaystyle f'(0^-) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cdot \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x \cdot \operatorname{sen} x}{2x}$

    $\displaystyle = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cdot \cos x}{2} = 0$
  - $\displaystyle f'(0^+) = \lim_{x\to 0} (1 - 2x^2) \cdot e^{4-x^2} = e^4$

  Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \implies f(x)$ no es derivable en $x = 0$

b) En $(0, +\infty)$:

$$f'(x) = (1 - 2x^2) \cdot e^{4-x^2} = 0 \implies \begin{cases} 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \cancel{-\sqrt{2}/2} \notin (0, +\infty) \\ x = +\sqrt{2}/2 \end{cases} \\ e^{4-x^2} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ Solución} \end{cases}$$

$$f''(x) = (4x^3 - 6x) \cdot e^{4-x^2} \implies f''(\sqrt{2}/2) < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } (\sqrt{2}/2, f(\sqrt{2}/2))$$

c) $$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot e^{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \underbrace{(-2x)}_{u'} \cdot \underbrace{e^{4-x^2}}_{e^u}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{4-x^2}\Big]_0^2$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^4\right) = \frac{e^4 - 1}{2} \simeq 26.8$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1,0,2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3,1,0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) Llamamos r a la trayectoria de la partícula

$$r \equiv \begin{cases} P(1,0,2) \\ Q(3,1,0) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(1,0,2) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{PQ} = (2,1,-2) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2-2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$R = r \cap \pi \implies 2\cdot(1+2\lambda) - \lambda + 2\cdot(2-2\lambda) + 5 = 0 \xRightarrow{\lambda=11} R(23,11,-20)$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\widehat{\vec{d_r},\vec{n}_\pi}\right) = \frac{\left|\vec{d_r}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d_r}\right|\cdot|\vec{n}_\pi|} = \frac{|(2,1,-2)\cdot(2,-1,2)|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}} = \frac{|-1|}{9} = \frac{1}{9}$$

b) Buscamos un punto $S(1+2\lambda, \lambda, 2-2\lambda)$ de la recta r, de manera que $d(S,\pi) = 1$.

$$d(S,\pi) = \frac{|2\cdot(1+2\lambda) - \lambda + 2\cdot(2-2\lambda)+5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|-\lambda+11|}{3} = 1$$

$$\implies |-\lambda+11| = 3 \implies \begin{cases} -\lambda+11 = 3 & \xRightarrow{\lambda=8} S_1(17,8,-14) \\ -\lambda+11 = -3 & \xRightarrow{\lambda=14} S_2(29,14,-26) \end{cases}$$

$$d(P,S_1) = \left|\overrightarrow{PS_1}\right| = |(16,7,-15)| = \sqrt{530}$$
$$d(P,S_2) = \left|\overrightarrow{PS_2}\right| = |(28,14,-28)| = \sqrt{1764}$$

Lo que supone que el punto S_2 es un punto de la recta r que se encuentra a distancia 1 del plano π, pero en un punto de la trayectoria *posterior* al impacto, luego la solución es $S_1(17,8,-14)$.

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

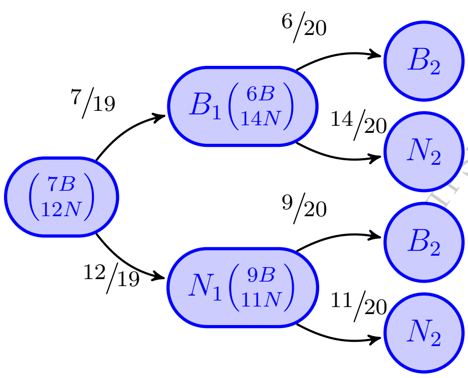
(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos: $B_i \equiv$ "Sale bola **blanca** en la extracción i"

$N_i \equiv$ "Sale bola **negra** en la extracción i"

a) $$P(B_2) = P\Big((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)\Big) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2)$$
$$= P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2 \mid N_1) = \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{20} + \frac{12}{19} \cdot \frac{9}{20}$$
$$= \frac{15}{38} \simeq 0.3947$$



b) $$P\Big((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)\Big)$$
$$= P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2)$$
$$= P(B_1) \cdot P(N_2 \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2 \mid N_1)$$
$$= \frac{7}{19} \cdot \frac{14}{20} + \frac{12}{19} \cdot \frac{9}{20} = \frac{103}{190} \simeq 0.5421$$

c) $$P(N_1 \mid B_2) = \frac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(N_1) \cdot P(B_2 \mid N_1)}{P(B_2)}$$
$$= \frac{{}^{12}\!/_{19} \cdot {}^{9}\!/_{20}}{{}^{15}\!/_{38}} = \frac{18}{25} = 0.72$$

Modelo 2022
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) (0.5 puntos) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz A.

c) (1 punto) Para $a = 2$, resolver el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $|A| = a^2 + a = a \cdot (a+1) = 0 \implies a = \{-1, 0\}$. Por lo que $\nexists A^{-1}$, si $a = \{-1, 0\}$

b) Para $a = 1$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $|A| = 1^2 + 1 = 2$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) Para $a = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $|A| = 2^2 + 2 = 6$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \implies \boxed{\begin{matrix} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1/2 \end{matrix}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea $f(x) = x + x^2$. Se pide:

a) *(1 punto) Hallar el área de la region acotada que está limitada por la gráfica de f y la recta $y = 2x$.*

b) *(1.5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de f. En el punto $(1, f(1))$ la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x = 2$.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $f(x) = x + x^2$

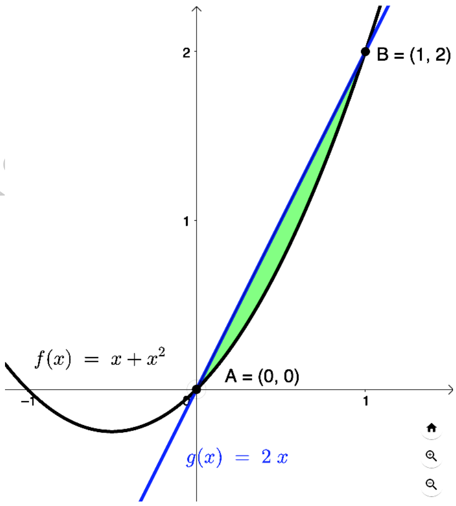
$g(x) = 2x$

$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x = 0 \Rightarrow x = \{0, 1\}$

$$A_1 = \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 (x^2 - x)\,dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$Area = |A_1| = \frac{1}{6}\ u^2$$

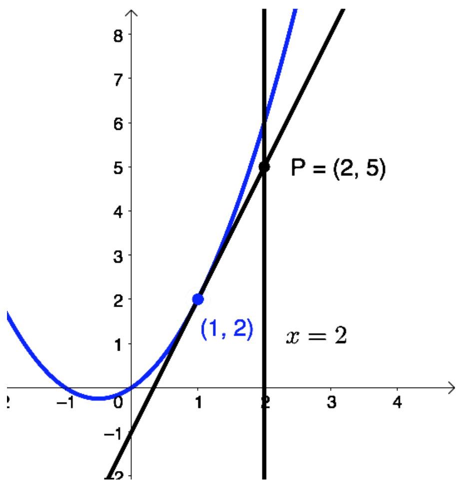


b) Hallamos la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, f(1))$

$$x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = 2$$
$$\implies (x_0, y_0) = (1, 2)$$
$$f'(x) = 1 + 2x$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(1) = 3$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r(x - x_0)$$
$$y - 2 = 3 \cdot (x - 1)$$
$$r \equiv y = 3x - 1$$

La intersección entre la tangente y $x = 2$ será:

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x = 2 \end{cases} \implies y = 5 \implies \boxed{P(2,5)}$$



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$, $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto $A(1,7,1)$, se pide:

a) *(0.5 puntos) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.*

b) *(1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1, otra cara en el plano π_2, y un vértice en el punto A.*

c) *(1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

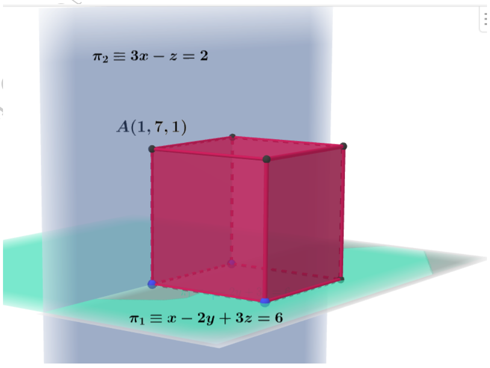
a) $\pi_1 \perp \pi_2 \iff \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0$

$\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = (1,-2,3) \cdot (3,0,-1) = 3 + 0 - 3 = 0$, luego $\pi_1 \perp \pi_2$

b) Como $A \in \pi_2$, ya que $3 \cdot 1 - 1 = 2$, la arista a del cubo será igual a la distancia del punto A al plano π_1

$$a = d(A, \pi_1) = \frac{|1 - 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

$$V_{cubo} = a^3 = \frac{1024\sqrt{14}}{49} \simeq 78.19\ u^3$$



c) Simétrico de A respecto de π_1

- Hallamos la recta $r \perp \pi_1 \mid A(1,7,1) \in r$

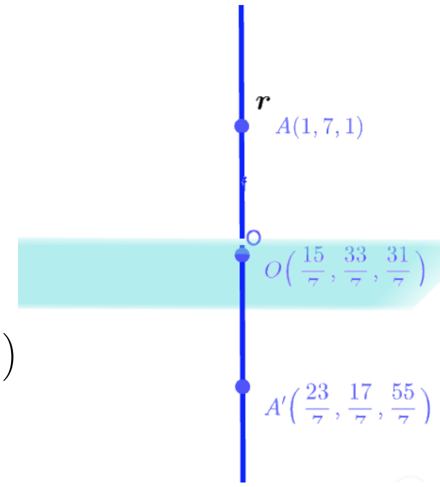
$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

- $O = r \cap \pi_1$

$(1+\lambda) - 2 \cdot (7 - 2\lambda) + 3 \cdot (1 + 3\lambda) = 6 \xRightarrow{\lambda = 8/7} O\left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right)$

- $O = M_{\overline{AA'}} = \dfrac{A + A'}{2} \implies A' = 2O - A$

$A' = 2 \cdot \left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right) - (1,7,1) = \left(\frac{23}{7}, \frac{17}{7}, \frac{55}{7}\right)$



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0.2 y 0.3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) (0.5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.

b) (0.5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.

c) (0.75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.

d) (0.75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $P(A \cap B) \underset{indep.}{\overset{A\ y\ B}{=}} P(A) \cdot P(B) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \Big[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\Big]$

$= 1 - (0.2 + 0.3 - 0.06) = 0.56$

Otra opción: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \underset{indep.}{\overset{A\ y\ B}{=}} P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0.8 \cdot 0.7 = 0.56$

c) $P\Big((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\Big) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B) = 0.2 + 0.3 - 2 \cdot 0.06 = 0.38$

Otra opción: $P\Big((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\Big) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

$\underset{indep.}{\overset{A\ y\ B}{=}} 0.2 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.38$

d) Sea X : nº individuos con caracteríatica A & $X : \mathcal{B}(10, 0.2)$

$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^7 \simeq 0.2013$