

MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2020

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Modelo 2020

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) (0.5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determínese cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

- a) ℓ nitrógeno = $0.78 \cdot 2000 = 1560$
 ℓ oxígeno = $0.21 \cdot 2000 = 420$
 ℓ argón = $0.01 \cdot 2000 = 20$

b) Sean las incógnitas:

$x \equiv$ Litros de de la mezcla A

$y \equiv$ Litros de de la mezcla B

$z \equiv$ Litros de de la mezcla C

Para determinar el sistema de ecuaciones vamos a decir que la cantidad de cada uno de los gases ha de ser la obtenida en el apartado anterior.

$$\left. \begin{array}{l} 0.8x + 0.7y + 0.6z = 1560 \\ 0.2x + 0.2y + 0.4z = 420 \\ 0.1y = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2y + 4z = 4200 \\ y = 200 \\ 8x + 7y + 6z = 15600 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 4200 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 8 & 7 & 6 & 15600 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ F_3 - 4F_1 & & & \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 4200 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & -1 & -10 & -1200 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ F_3 + F_2 & & & \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 4200 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & -10 & -1000 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + 2 \cdot 200 + 4 \cdot 100 = 4200 \\ y = 200 \\ -10z = -1000 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1700 \\ y = 200 \\ z = 100 \end{array}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Dada la función $f(x) = e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $3/e$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0.5 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1 - f(x)}{6x - 4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$, $y = 1$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) $f(x) = e^{3x-2}$

$$f'(x) = 3e^{3x-2}$$

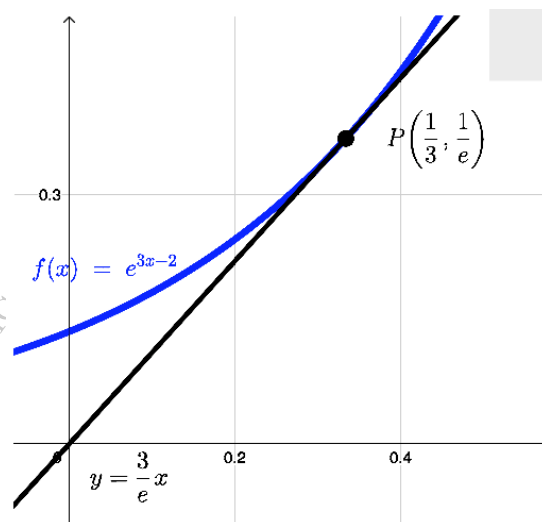
$$m_r = f'(x_0) \Rightarrow \frac{3}{e} = 3e^{3x_0-2}$$

$$\Rightarrow 3e^{-1} = 3e^{3x_0-2} \Rightarrow -1 = 3x_0 - 2$$

$$\Rightarrow x_0 = 1/3 \Rightarrow y_0 = 1/e$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{r \equiv y = \frac{3}{e}x}$$



b) $\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1 - f(x)}{6x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1 - e^{3x-2}}{6x - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{-3e^{3x-2}}{6} = -\frac{1}{2}$

c) Tenemos que hallar el área comprendida entre las funciones $f(x) = e^{3x-2}$ y $g(x) = 1$, para lo que se define la función $h(x) = f(x) - g(x) = e^{3x-2} - 1$ calculando los puntos de corte con el eje OX .

$$e^{3x-2} - 1 = 0 \Rightarrow e^{3x-2} = 1 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2/3$$

Tenemos un único recinto de integración $A_1 = (0, 2/3)$ definido por la recta vertical $x = 0$ y el punto de corte de $h(x)$ con el eje OX .

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{2/3} (e^{3x-2} - 1) dx = \frac{1}{3} \int_0^{2/3} 3 \cdot e^{3x-2} dx - \int_0^{2/3} dx = \frac{1}{3} [e^{3x-2} - x]_0^{2/3} \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{3} e^{-2} = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{e^2} \right) \\ \text{Area} &= |A_1| = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{e^2} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$, se pide:

- a) (1.5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.
b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

- a) Hallamos los vectores directores de ambas rectas para ver si son paralelas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \equiv \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(-1, 2, 0) \\ \vec{d}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (1, -3, 1) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \equiv \begin{cases} x - 5z - 4 = 0 \\ y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2(4, -3, 0) \\ \vec{d}_{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (5, 4, 1) \end{cases}$$

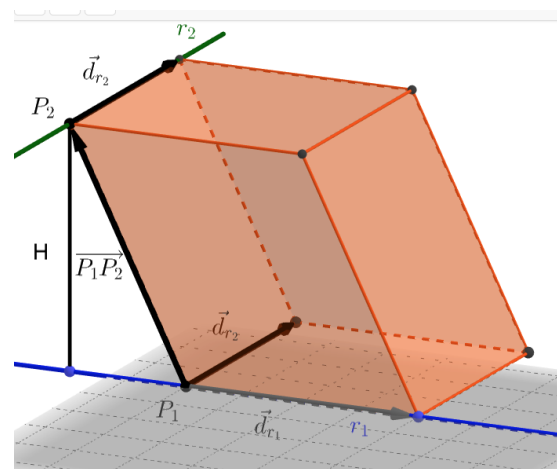
Como $\vec{d}_{r_1} \nparallel \vec{d}_{r_2}$ las rectas se cortan en un plano o se cruzan en el espacio. Para determinarlo sacamos el vector que une un punto de cada recta $\overrightarrow{P_1P_2} = (5, -5, 0)$ y hallamos el producto mixto:

$$[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -55 \neq 0 \Rightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

Para calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan hallaremos la altura del paralelepípedo formado por los vectores directores de ambas rectas y el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$.

$$Vol_{\text{paralel.}} = A_{\text{base}} \cdot H \Rightarrow H = \frac{Vol}{A_{\text{base}}}$$

Como el volumen del paralelepípedo es $|\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{P_1P_2}|$ y el área de la base es $|\vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2}|$ tenemos que:



$$d(r_1, r_2) = H = \frac{|-55|}{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right|} = \frac{55}{|(-7, 4, 19)|} = \frac{55}{\sqrt{426}} \simeq 2.66$$

b) Hallamos el plano π que pasa por el punto $O(0,0,0)$ y contiene a la recta r_1 .

$$\pi \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ r_1 \end{cases} \equiv [\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP_1}, \vec{d}_{r_1}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + z = 0$$

Para hallar el punto P de corte $r_2 \cap \pi$ escribimos la recta r_2 en forma paramétrica y la sustituimos en la ecuación del plano:

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (4 + 5\lambda) + (-3 + 4\lambda) + \lambda = 0 \Rightarrow 5 + 15\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1/3 \Rightarrow \boxed{P = (7/3, -13/3, -1/3)}$$

_____ o _____

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

Dados dos sucesos A y B , se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(A \cup B) = 0.55 \quad \& \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.90 \quad \& \quad P(B | A) = 0.25$$

Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B | \overline{A})$.

b) (0.5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

$$a) P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0.90 \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.90 = 0.1$$

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.1}{P(A)} = 0.25 \Rightarrow P(A) = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + P(B) - 0.1 = 0.55 \Rightarrow P(B) = 0.25$$

$$P(B | \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{\overline{A}} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.25 - 0.1}{1 - 0.4} = 0.25$$

$$b) \left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.1 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Los sucesos son independientes}$$

_____ o _____

Modelo 2020

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t .
- b) (1.5 puntos) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{ran}(A) &= \operatorname{ran} \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \circ \text{ Si } t \neq 0 \Rightarrow \operatorname{ran} A = 2 \\ \circ \text{ Si } t = 0 \Rightarrow \operatorname{ran} A = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Para que el sistema sea compatible determinado tiene que cumplirse que $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^\circ \text{ incógnitas} = 2$ por lo que $t \neq 0$. Resolvemos por el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A | A^* &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array} \right) \sim \begin{bmatrix} F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array} \right) \\ &\sim \begin{bmatrix} \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & 0 & 6t+6 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Para que } \operatorname{ran}(A^*) = 2 \\ 6t+6 = 0 \Rightarrow t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $t = -1$ el sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 6 \\ y = -3 \end{matrix}}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{3}{x+1}$, se pide:

- (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$.
- (0.75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y = f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 x \cdot f(x) dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

- a) Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.

- $x_0 = 2 \implies y_0 = f(x_0) = f(2) = 1$
- $f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$
- $m_r = f'(2) = \frac{-3}{3^2} = -\frac{1}{3}$
- $r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 2) \implies r \equiv x + 3y = 5$

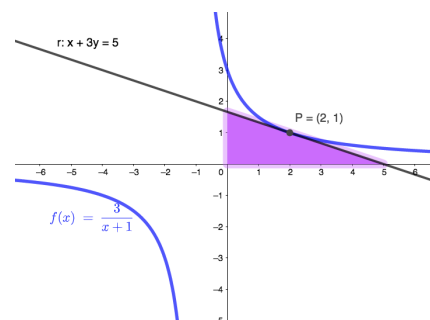
Hallamos los puntos de corte con:

Eje OX: $y = 0 \implies x = 5$

Eje OY: $x = 0 \implies 3y = 5 \implies y = 5/3$

El área del triángulo será:

$$Area = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 5/3}{2} = \frac{25}{6} u^2$$



- b) ▪ A. Horizontal $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \implies$ A.H. en $y = 0$
- A. Vertical Hallamos las raíces del denominador: $x + 1 = 0 \implies x = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0^- \end{bmatrix} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0^+ \end{bmatrix} = +\infty \end{cases} \implies$ A.V. en $x = -1$

Hallamos los puntos singulares: $f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2} = 0 \implies \nexists P.S.$

Como $f'(x) < 0 \forall x \in \text{Dom}(f)$, la función es decreciente en todo su dominio.

c)
$$\begin{aligned} \int_0^2 x \cdot f(x) dx &= \int_0^2 \frac{3x}{x+1} dx = \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{x+1} \right) dx = \int_0^2 3 dx - 3 \int_0^2 \frac{1}{x+1} dx \\ &= 3x - 3 \ln|x+1| \Big|_0^2 = (6 - 3 \ln 3) - (0 - 3 \ln 1) = 6 - 3 \ln 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dados los puntos $A(1, 1, -2)$, $B(3, -1, 4)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$, se pide:

- a) (1.5 puntos) Calcular el área del triángulo $\triangle OPQ$, siendo $O(0, 0, 0)$, P el punto medio del segmento \overline{AB} y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi \equiv z = 7$.
- b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r .
- c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B .

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) Calculamos $P = M_{\overline{AB}} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (2, 0, 1)$

Sea s la recta que pasa por A y $B \Rightarrow s \equiv \begin{cases} A(1, 1, -2) \\ \vec{d}_s = \overrightarrow{AB} = (2, -2, 6) \approx (1, -1, 3) \end{cases}$.

Un punto genérico de la recta s tiene de coordenadas $(1 + \lambda, 1 - \lambda, -2 + 3\lambda)$

$Q = s \cap \pi \Rightarrow -2 + 3\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow Q(4, -2, 7)$.

$$\left. \begin{matrix} O(0, 0, 0) \\ P(2, 0, 1) \\ Q(4, -2, 7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \overrightarrow{OP} = (2, 0, 1) \\ \overrightarrow{OQ} = (4, -2, 7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow Area_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}|$$

$$Area_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |(2, -10, -4)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{120} = \sqrt{30} \text{ u}^2$$

b) Hallamos el plano π_2 que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta r .

$$\begin{aligned} \pi_2 \equiv \begin{cases} A(1, 1, -2) \\ \vec{n}_{\pi_2} = \vec{d}_r = (3, 5, 0) \end{cases} &\Rightarrow 3x + 5y + C = 0 \Rightarrow 3 + 5 + C = 0 \\ &\Rightarrow C = -8 \Rightarrow \boxed{\pi_2 \equiv 3x + 5y - 8 = 0} \end{aligned}$$

c) Hallamos el coseno del ángulo que forman las rectas r y s .

$$\cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{\vec{d}_r, \vec{d}_s}) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|} = \frac{|3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 3|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{374}} = 0.1034$$

_____ o _____

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30°C y varianza 25. Se pide:

- a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28°C y 32°C .
- b) (1 puntos) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36°C .
- c) (0.75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50 % de los días del mes.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(30, \sigma^2 = 25) \implies X : \mathcal{N}(30, 5)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(28 \leq X \leq 32) &= P\left(\frac{28-30}{5} \leq Z \leq \frac{32-30}{5}\right) = P(-0.4 \leq Z \leq 0.4) \\ &= P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.4) = P(Z \leq 0.4) - [1 - P(Z \leq 0.4)] \\ &= 2 \cdot P(Z \leq 0.4) - 1 = 2 \cdot 0.6554 - 1 = 0.3108 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq 36) &= P\left(Z \geq \frac{36-30}{5}\right) = P(Z \geq 1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2) \\ &= 1 - 0.8849 = 0.1151 \end{aligned}$$

Como un mes tiene 30 días, se superará la temperatura en $0.1151 \cdot 30 \simeq 3.45$, es decir, entre 3 y 4 días.

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X \geq t) &= 1 - P(X \leq t) = 1 - P\left(Z \leq \frac{t-30}{5}\right) = 0.5 \\ &\xrightarrow{\text{Tabla}} \frac{t-30}{5} = 0 \implies t = 30^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

_____ o _____