

MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2018

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Modelo 2018

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1.5 puntos) Obtener los valores de m para los que la matriz $A - mI$ admite inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$A - mI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 0 & 3-m & 0 \\ 0 & -1 & 3-m \end{pmatrix}$$

$$|A - mI| = -m \cdot (3 - m)^2 \neq 0 \implies m \neq \{0, 3\}$$

por tanto $\exists (A - mI)^{-1}$ si $m \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) Para $m = 2$, $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A - 2I| = -2 \cdot (3 - 2)^2 = -2$

Hallamos la matriz inversa de $A - 2I$ por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj}(A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{|A - 2I|} \text{Adj}(A - 2I)^T = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $(A - 2I)^{-1} \cdot (A - 2I) = I$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Dada la función $f(x) = 2 \cos x + |x - 1|$.

- a) (0.5 puntos) Determinar el valor de $f'(0)$.
- b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.
- c) (1 punto) Hallar el área del recinto plano limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción A)

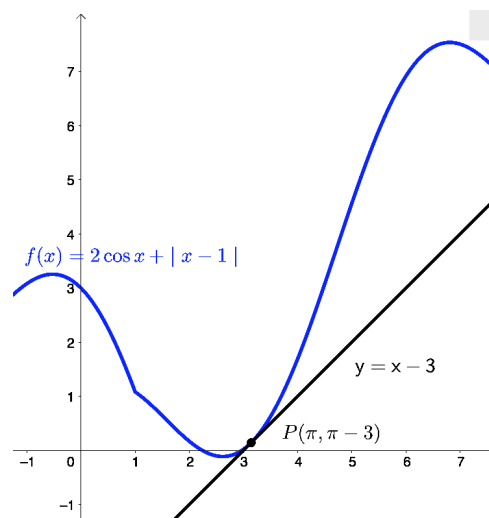
Solución.

- a) Escribimos la función a trozos correspondiente al desarrollo del valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos x - (x - 1) & \text{si } x < 1 \\ 2 \cos x + (x - 1) & \text{si } x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases}, \text{ luego la derivada será:}$$
$$f'(x) = \begin{cases} -2 \sin x - 1 & \text{si } x < 1 \\ -2 \sin x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = -2 \sin(0) - 1 = -1$$

- b) El punto de tangencia es:

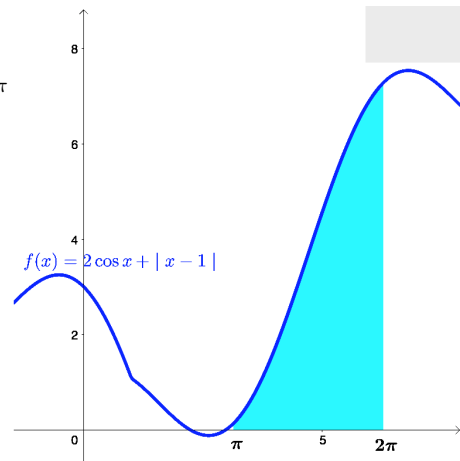
$$\begin{aligned} x_0 &= \pi \\ y_0 &= f(x_0) = f(\pi) = 2 \cos \pi + (\pi - 1) = \pi - 3 \\ m_r &= f'(x_0) = f'(\pi) = -2 \sin \pi + 1 = 1 \\ r &\equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \\ r &\equiv y - (\pi - 3) = 1 \cdot (x - \pi) \\ \boxed{r &\equiv y = x - 3} \end{aligned}$$



- c)
 - $f(x)$ es continua en \mathbb{R}
 - Si $x \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow f'(x) = -2 \sin x + 1 > 0 \forall x \Rightarrow f(x)$ es creciente
 - $f(\pi) = 2 \cos \pi + (\pi - 1) = \pi - 3 > 0$

Por tanto $f(x)$ no corta al eje OX , por lo que tenemos un único recinto de integración comprendido por las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{\pi}^{2\pi} (2 \cos x + x - 1) dx = -2 \sin x + \frac{x^2}{2} - x \Big|_{\pi}^{2\pi} \\
 &= \left(-2 \sin 2\pi + \frac{(2\pi)^2}{2} - 2\pi \right) \\
 &\quad - \left(-2 \sin \pi + \frac{\pi^2}{2} - \pi \right) = \frac{3\pi^2}{2} - \pi \\
 \text{Area} &= |A_1| = \frac{3\pi^2}{2} - \pi
 \end{aligned}$$



Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$, se pide:

- (1.5 puntos) Hallar los puntos de la recta r equidistantes de π_1 y π_2 .
- (1 punto) Hallar el área del triángulo que forma el punto $P(-2, 3, 2)$ con los puntos de intersección de r con π_1 y π_2 .

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

- Cogemos un punto $Q \in r$ genérico: $Q(1 - 2t, -1 + t, 1 + t)$, y obligamos a que $d(Q, \pi_1) = d(Q, \pi_2)$

$$\frac{|3 \cdot (1 - 2t) + (-1 + t) + 2 \cdot (1 + t) - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|2 \cdot (1 - 2t) - (-1 + t) + 3 \cdot (1 + t) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}}$$

$$3 - 3t = \pm(5 - 2t) \Rightarrow \begin{cases} 3 - 3t = 5 - 2t \Rightarrow t = -2 \Rightarrow Q(5, -3, -1) \\ 3 - 3t = -5 + 2t \Rightarrow t = 8/5 \Rightarrow Q'(-11/5, 3/5, 13/5) \end{cases}$$

- Hallamos los puntos $r \cap \pi_1 \Rightarrow R$ y $r \cap \pi_2 \Rightarrow S$

$$r \cap \pi_1 \Rightarrow 3 \cdot (1 - 2t) + (-1 + t) + 2 \cdot (1 + t) - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow R(-1, 0, 2)$$

$$r \cap \pi_2 \Rightarrow 2 \cdot (1 - 2t) - (-1 + t) + 3 \cdot (1 + t) - 1 = 0 \Rightarrow t = 5/2 \Rightarrow S(-4, 3/2, 7/2)$$

Siendo $P(-2, 3, 2)$, hallamos $\overrightarrow{PR} = (1, -3, 0)$ y $\overrightarrow{PS} = (-2, -3/2, 3/2)$

$$\text{Area}_{\triangle PRS} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & -3/2 & 3/2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |(-9/2, -3/2, -15/2)| = \frac{3\sqrt{35}}{4} u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de segundo de bachillerato se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide :

- a) (1 punto) Determinar el porcentaje de estudiantes varones cuyo peso está comprendido entre los 68 y 80 kg.
- b) (0.5 puntos) Estimar cuántos de los 1500 estudiantes varones, que se han presentado a las pruebas de la EvAU en una cierta universidad, pesan más de 80 kg.
- c) (1 punto) Si se sabe que uno de estos estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 86 kg?

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

$X \equiv \text{"Peso de los varones de 2º Bachillerato"} \sim \mathcal{N}(74, 6)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(68 \leq X \leq 80) &= P\left(\frac{68-74}{6} \leq Z \leq \frac{80-74}{6}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq -1) \\ &= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = 2P(Z \leq 1) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq 80) &= 1 - P(X \leq 80) = 1 - P\left(Z \leq \frac{80-74}{6}\right) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 \\ &= 0.1587 \implies 0.1587 \cdot 1500 = 238 \text{ estudiantes pesan menos de 80 kg.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X \geq 86 \mid X \geq 76) &= \frac{P(X \geq 86 \cap X \geq 76)}{P(X \geq 76)} = \frac{P(X \geq 86)}{P(X \geq 76)} \\ &= \frac{P\left(Z \geq \frac{86-74}{6}\right)}{P\left(X \geq \frac{76-74}{6}\right)} = \frac{P(Z \geq 2)}{P(Z \geq 0.33)} = \frac{1 - P(Z \leq 2)}{1 - P(Z \leq 0.33)} \\ &= \frac{1 - 0.9772}{1 - 0.6293} = 0.0615 \end{aligned}$$

_____ o _____

Modelo 2018

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix},$$

se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m .
- (0.5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando $m = -1$

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

- Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 & 1 \\ 1 & m & m & 2+m \end{array} \right) \Rightarrow |A| = m - m^2 = 0 \Rightarrow m = \{0, 1\}$$

- Si $m \neq \{0, 1\}$ $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $m = 0 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)}$

- Si $m = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)}$

- b) Resolvemos el sistema para $m = -1$ por el método de Gauss. Como $m \neq \{0, 1\}$ estamos antes un S.C.D.

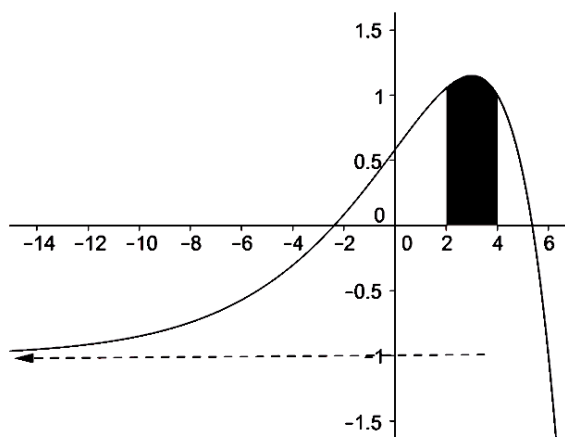
$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_3 + F_2 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x + 2 - 2 = 1 \\ 2y - 2 = 2 \\ -z = 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array}}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

El dibujo adjunto muestra la gráfica de la función $f(x) = (6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1$



Se pide:

- (1 punto) Calcular el área de la región sombreada.
- (1 punto) Determinar la abscisa del punto de la gráfica donde la recta tangente tiene pendiente máxima.
- (0.5 puntos) Efectuando los cálculos necesarios, obtener la ecuación de la asíntota que se muestra en el dibujo (flecha discontinua inferior).

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

- a) Planteamos el área como la integral de la función:

$$F(x) = \int \left((6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1 \right) dx = \underbrace{\int (6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} dx}_{I_1} - \underbrace{\int dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int (6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 6 - x \Rightarrow du = -dx \\ dv = e^{\frac{x-4}{3}} dx \Rightarrow v = 3e^{\frac{x-4}{3}} \end{array} \right\} = 3 \cdot (6 - x) \cdot e^{\frac{x-4}{3}} + \int 3e^{\frac{x-4}{3}} dx = 3 \cdot (6 - x) \cdot e^{\frac{x-4}{3}} + 9e^{\frac{x-4}{3}} = (18 - 3x + 9) \cdot e^{\frac{x-4}{3}} = (27 - 3x) \cdot e^{\frac{x-4}{3}}$$

$$I_2 = \int dx = x$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_2^4 f(x) dx = F(4) - F(2) = (27 - 3x) \cdot e^{\frac{x-4}{3}} - x \Big|_2^4 = [(27 - 12) \cdot e^0 - 4] \\ &\quad - [(27 - 6) \cdot e^{\frac{2-4}{3}} - 2] = 13 - 21e^{-2/3} = 13 - \frac{21}{e^{2/3}} u^2 \end{aligned}$$

- b) Hay que maximizar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para lo cual hallaremos la pendiente:

$$f(x) = (6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1 \implies m(x) = f'(x) = \left(1 - \frac{x}{3}\right)e^{\frac{x-4}{3}}$$

Hallamos los puntos singulares de la función pendiente $m(x)$:

$$\begin{aligned} m'(x) = 0 &\implies -\frac{xe^{\frac{x-4}{3}}}{9} = 0 \implies \boxed{x = 0} \\ m''(x) &= -\frac{1}{9} \cdot \left(1 + \frac{x}{3}\right)e^{\frac{x-4}{3}} \implies m''(0) = -\frac{1}{9}e^{-4/3} < 0 \xrightarrow{(\cap)} \text{máximo} \end{aligned}$$

Luego la pendiente máxima se encuentra en el punto de abscisa $x = 0$ y vale

$$m(0) = \left(1 - \frac{0}{3}\right)e^{\frac{0-4}{3}} = e^{-4/3}$$

- c) Tenemos que calcular la asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1\right] = -1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (6 + x)e^{\frac{-x-4}{3}} \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + x}{e^{\frac{x+4}{3}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x-4}{3}}} = -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dados los planos $\pi_1 \equiv x + y = 0$, $\pi_2 \equiv x = 0$ y el punto $B(-1, 1, 1)$, se pide:

- (1 punto) Determinar el punto B' , simétrico de B respecto del plano π_2 .
- (1 punto) Obtener una ecuación de la recta r , contenida en el plano π_1 , paralela al plano π_2 y que pasa por el punto B .
- (0.5 puntos) Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

- a) Hallamos un punto genérico $B' \in r$

$$r \equiv \begin{cases} B(-1, 1, 1) \\ \vec{d}_t = \vec{n}_{\pi_2} = (1, 0, 0) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \implies B'(-1 + \lambda, 1, 1)$$

Calculamos $r \cap \pi_2 \rightarrow X$. X será el punto medio de B y B'

$$\begin{aligned} r \cap \pi_2 &\equiv -1 + \lambda = 0 \implies \lambda = 1 \implies X(0, 1, 1) \\ X &= \frac{B + B'}{2} \implies (0, 1, 1) = \frac{(-1, 1, 1) + (-1 + \lambda, 1, 1)}{2} \\ (0, 1, 1) &= \left(\frac{-2 + \lambda}{2}, 1, 1\right) \implies \frac{-2 + \lambda}{2} = 0 \implies \lambda = 2 \implies \boxed{B' = (1, 1, 1)} \end{aligned}$$

$$\text{b) } r \equiv \begin{cases} B(-1, 1, 1) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

- c) El ángulo α formado por los planos π_1 y π_2 es el ángulo agudo que forman los vectores normales $\vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, 0)$ y $\vec{n}_{\pi_2} = (1, 0, 0)$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{|1 + 0 + 0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

_____ o _____

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

En una bolsa hay 10 caramelos de fresa, 15 de menta y 5 de limón. Se extraen sucesivamente de la bolsa dos caramelos. Se pide:

- a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que el segundo de ellos sea de fresa.
- b) (0.5 puntos) Determinar la probabilidad de que los dos sean de fresa.
- c) (1 punto) Sabiendo que el segundo ha sido de fresa, calcular la probabilidad de que lo haya sido también el primero.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$F_i \equiv$ "El caramelo extraído la vez i es de fresa"

$M_i \equiv$ "El caramelo extraído la vez i es de menta"

$L_i \equiv$ "El caramelo extraído la vez i es de limón"

$$\text{a) } P(F_2) = P(F_1 \cap F_2) + P(M_1 \cap F_2) + P(L_1 \cap F_2) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} + \frac{15}{30} \cdot \frac{10}{29} + \frac{5}{30} \cdot \frac{10}{29} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } P(F_1 \cap F_2) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} = \frac{3}{29}$$

$$\text{c) } P(F_1 | F_2) = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_2)} = \frac{3/29}{1/3} = \frac{9}{29}$$

_____ o _____