MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2022
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) *(2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.*

b) *(0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = 1/2$.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2m^2 + m - 1 = 0 \implies m = \{-1, 1/2\}$$

- Si $m \neq \{-1, 1/2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Comp. Indet. (∞ Sol.)

- Si $m = 1/2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche} \text{Sist. Comp. Indet. } (\infty \text{ Sol.})$$

b) Resolvemos el sistema para $m = 1/2$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - \frac{3\lambda-3}{5} + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y - 3\lambda = -3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{2-2\lambda}{5} \\ y = \frac{3\lambda-3}{5} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot e^{-1/x^2} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (0.5 puntos) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\,dx$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-1/x^2} + \cancel{x^3} \cdot \frac{2}{\cancel{x^3}} \cdot e^{-1/x^2} = \left(3x^2 + 2\right) \cdot e^{-1/x^2} \text{ , si } x \neq 0$$

a)
- Continuidad en $x = 0$
  - $f(0) = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3 \cdot e^{-1/x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{e^{1/x^2}} = 0$

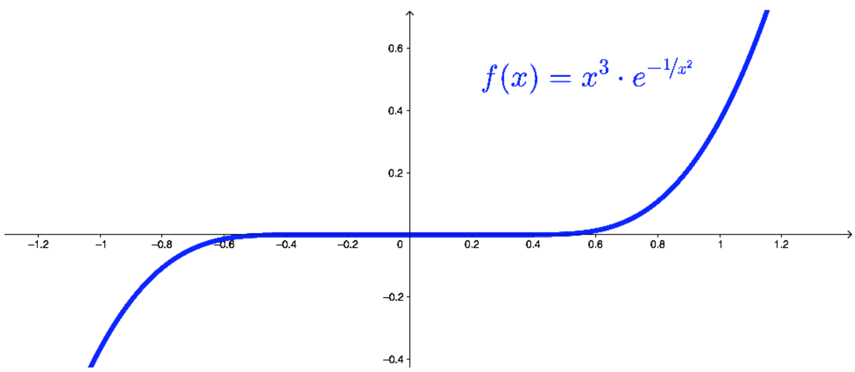
  $f(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) \implies f(x)$ es continua en $x = 0$.
- Derivabilidad en $x = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(3x^2 + 2\right) \cdot e^{-1/x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 2}{e^{1/x^2}} = 0$

  Luego la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) $f(-x) = -x^3 e^{-1/x^2} = -f(x) \implies f(x)$ tiene simetría *impar*

c) $$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\,dx = \int_1^2 \frac{\cancel{x^3} \cdot e^{-1/x^2}}{\cancel{x^6}\,x^3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3} \cdot e^{-1/x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \underbrace{\frac{2}{x^3}}_{u'} \cdot \underbrace{e^{-1/x^2}}_{e^u}\,dx = \frac{1}{2} \cdot e^{-1/x^2}\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-1/4} - e^{-1}\right) = \frac{e^{3/4} - 1}{e} \simeq 0.2055$$



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

a) $$r \equiv \begin{cases} R(0,-10,90) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,1) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases}$$

Cuando $z = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x = -90 \end{cases} \Longrightarrow P'(-90, -190, 0)$

b) La posición más cercana de la partícula al punto P viene determinada por la intersección la recta r y un plano π' perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.

$$\pi' \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{n}_{\pi'} = \vec{d_r} = (1,2,1) \end{cases} \Rightarrow x + 2y + z + D = 0 \xrightarrow[D=-4]{P \in \pi'} \pi' \equiv x + 2y + z - 4 = 0$$

$$Q = r \cap \pi' \Longrightarrow \lambda + 2 \cdot (-10 + 2\lambda) + 90 + \lambda - 4 = 0 \xrightarrow{\lambda=-11} \boxed{Q(-11, -32, 79)}$$

c) $$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\left|\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi}\right|}{\left|\vec{d_r}\right| \cdot |\vec{n_\pi}|} = \frac{|(1,2,1) \cdot (1,1,0)|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{|3|}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 60^\circ}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7 %.
Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“N°de mujeres en el Consejo”} \Longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.277)$$

a) $P(X=5) = \binom{10}{5} \cdot 0.277^5 \cdot 0.723^5 = 0.0812$

b) $P(X<10) = 1 - P(X \geq 10) = 1 - P(X=10) = 1 - \binom{10}{10} \cdot 0.277^{10} \cdot 0.723^0 = 0.9999$

c) $X : \mathcal{B}(200, 0.277) \sim \left\{ \begin{array}{l} n = 200 > 20 \checkmark \\ np = 55.4 > 5 \checkmark \\ nq = 144.6 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \sim Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = N(55.4, 6.33)$

$$\begin{aligned} 0.35 \cdot 200 = 70 \implies P(X \geq 70) &= P(Y \geq 69.5) = P\left(Z \geq \frac{69.5 - 55.4}{6.33}\right) \\ &= P(Z \geq 2.23) = 1 - P(Z < 2.23) = 1 - 0.9871 \\ &= 0.0129 \end{aligned}$$

Junio 2022
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Edad de Pablo”} \\ y &\equiv \text{“Edad de Alejandro”} \\ z &\equiv \text{“Edad de Alicia”} \end{aligned}$$

En el reparto proporcional a las edades, cada primo recibirá $\dfrac{9450}{45} = 210$ euros por cada año que tenga.

$$\begin{cases} x+y+z=45 \\ x+y=2z+3 \\ 210x-210z=420 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=45 \\ x+y-2z=3 \\ x-z=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 0 & -3 & -42 \\ 0 & -1 & -1 & -43 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lc} \Rightarrow x+29+14=45 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z=-42 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y-2\cdot 14=-43 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=16 \\ y=15 \\ z=14 \end{array}}$$

Por lo que el reparto será:

$$\begin{aligned} \text{Pablo} &\Longrightarrow 16\cdot 210 = 3360 \text{ euros} \\ \text{Alejandro} &\Longrightarrow 15\cdot 210 = 3150 \text{ euros} \\ \text{Alicia} &\Longrightarrow 14\cdot 210 = 2940 \text{ euros} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) (0.5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$.

b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1,1]$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción B)

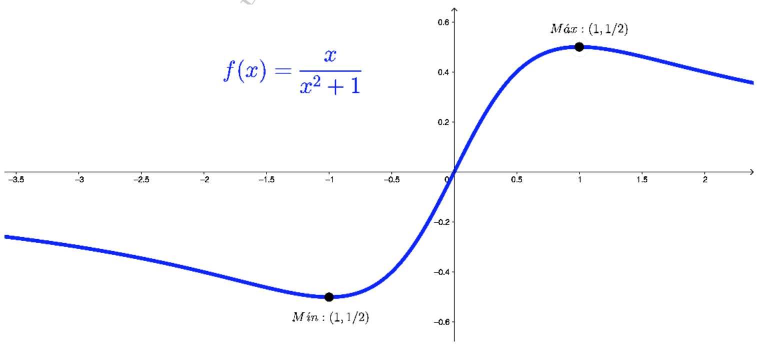
Solución.

a) $$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [-1,1] \\ f(-1) = -1/2 < 0 \\ f(1) = 1/2 > 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{Th.\,Bolzano} \exists c \in (-1,1) \mid f(c) = 0$$

b) $$f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \implies x = \pm 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

$f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $(-1,-1/2)$ y un *máximo relativo* en $(1,1/2)$.



c) $f(x) = 0 \implies \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$, que define dos regiones $A_1 : (-1,0)$ y $A_2 : (0.1)$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{u'/u}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big]_{-1}^{0} = -\frac{\ln 2}{2}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\ln 2 - \cancelto{0}{\ln 1}\right) = \frac{\ln 2}{2}$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \ln 2 \simeq 0.6932\ u^2$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sean el plano $\pi \equiv x+y+z=1$*, la recta* $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *y el punto* $P(0,1,0)$.

a) *(0.5 puntos) Verifique que la recta* r_1 *está contenida en el plano* π *y que el punto* P *pertenece al mismo plano.*

b) *(0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano* π *que pase por* P *y sea perpendicular a* r_1*.*

c) *(1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta,* r_2*, que pase por* P *y sea paralela a* r_1*. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas* r_1 *y* r_2*.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -1 \end{cases} \implies r_1 \equiv \begin{cases} R_1(1,1,-1) \\ \vec{d}_{r_1} = (1,-1,0) \end{cases}$$

a) $r_1 \in \pi \implies (1+\cancel{\lambda})+(1-\cancel{\lambda})-1=1$ ✓

$P \in \pi \implies 0+1+0=1$ ✓

b) La recta r pedida será la intersección del plano π y del plano π', perpendicular a r_1 que pasa por P.

$$\pi' \equiv \begin{cases} P(0,1,0) \\ \vec{n}_{\pi'} = \vec{d}_{r_1} = (1,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv x-y+D=0 \xrightarrow[D=1]{P\in\pi'} \pi' \equiv x-y+1=0$$

Por lo tanto la recta pedia es $r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+1=0 \end{cases}$

c) $r_2 \equiv \begin{cases} P(0,1,0) \\ \vec{d}_{r_2} = \vec{d}_{r_1} = (1,-1,0) \end{cases} \implies r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

El lado del cuadrado pedido será igual a la distancia entre las dos rectas paralelas.

$$\ell = d(r_1,r_2) = d(P,r_1) = \frac{\left|d_{r_1} \times \overrightarrow{PR_1}\right|}{\left|\vec{d}_{r_1}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|(1,1,1)|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$Area = \ell^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.5\ u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción B)

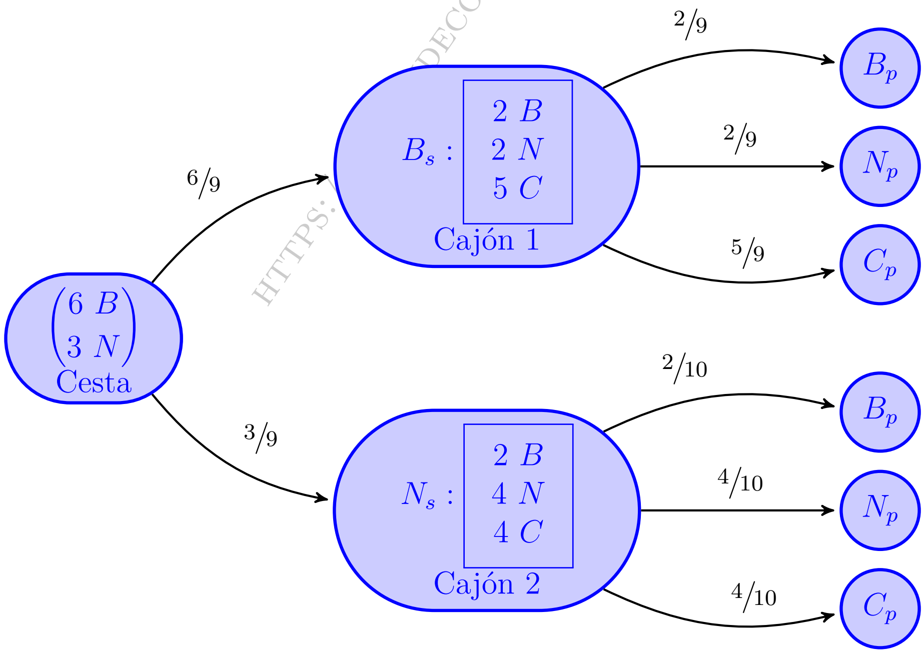
Solución.

Sean los sucesos:

$B_s \equiv$ "El sombrero es blanco" $\quad N_s \equiv$ "El sombrero es negro"

$B_p \equiv$ "El pañuelo es blanco" $\quad N_p \equiv$ "El pañuelo es negro"

$C_p \equiv$ "El pañuelo es de cuadros"



a) P("En el pañuelo aparece un color que no es el del sombrero")

$$= 1 - P(\text{“El pañuelo es del mismo color que el somprero”})$$

$$= 1 - P\Big((B_s \cap B_p) \cup (N_s \cap N_p)\Big) = 1 - \Big[P(B_s \cap B_p) + P(N_s \cap N_p)\Big]$$

$$= 1 - \Big[P(B_s) \cdot P(B_p \mid B_s) + P(N_s) \cdot P(N_p \mid N_s)\Big] = 1 - \left(\frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10}\right)$$

$$= \frac{97}{135} = 0.7185$$

b) $P(\text{“Aparezca el negro en algún complemento”})$

$$= 1 - P(\text{“Los dos complementos son blancos''})$$

$$= 1 - P(B_s \cap B_p) = 1 - P(B_s) \cdot P(B_p \mid B_s) = 1 - \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{23}{27} = 0.8518$$

c) $P(N_s \mid C_p) = \dfrac{P(N_s \cap C_p)}{P(C_p)} = \dfrac{P(N_s) \cdot P(C_p \mid N_s)}{P(B_s \cap C_p) + P(N_s \cap C_p)}$

$$= \frac{P(N_s) \cdot P(C_p \mid N_s)}{P(B_s) \cdot P(C_p \mid B_s) + P(N_s) \cdot P(C_p \mid N_s)} = \frac{\frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{6}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10}} = \frac{9}{34} = 0.2647$$