MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2022

- Ordinario -

(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2022 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ mx + (m+1)y - z = m - 1 \\ -x - 2y + (2m-1)z = 1 - m \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = 1$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & -1 & m-1 \\ -1 & -2 & 2m-1 & 1-m \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2m^2 + 4m - 6 = 2 \cdot (m-1) \cdot (m+3) = 0 \implies m = \{-3, 1\}$$

- Si $m \neq \{-3, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -7 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$$

$\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + \frac{\lambda}{3} - \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y - \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda/3 \\ y = \lambda/3 \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea la función $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

a) (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$*.*

b) (1.5 puntos) Dada la función $g(x) = \dfrac{5-x}{2}$*, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$*.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} = 0 \implies \nexists$ Ptos. singulares. Como $f'(x) < 0 \ \forall x \in \operatorname{Dom}(f)$, la función $f(x)$ es *decreciente* en todo su dominio.

b) $h(x) = f(x) - g(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{5-x}{2} = \dfrac{2x + 2 - (5x - x^2)}{2x} = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x} = 0$

$\implies x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = \{1, 2\}$

$$A_1 = \int_1^2 h(x)\,dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5-x}{2}\right) dx = x + \ln x - \frac{1}{2}\cdot\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg]_1^2$$

$$= (2 + \ln 2 - 4) - \left(1 + \cancel{\ln 1} - \frac{9}{4}\right) = \ln 2 - \frac{3}{4} \simeq -0.05685$$

$$Area = |A_1| = \frac{3}{4} - \ln 2 \simeq 0.05685\ u^2$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ $, \lambda \in \mathbb{R}$ *y el punto* $P(1,1,0)$.

a) *(1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta* r *que distan de* P *una unidad.*

b) *(1.5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por* P*, son perpendiculares a* r *y forman un ángulo* $\frac{\pi}{3}$ *radianes con la normal al plano* $x = 0$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R} \implies r \equiv \begin{cases} R(0,0,0) \\ \vec{d_r} = (1,1,0) \end{cases}$$

a) Sea $Q(\lambda, \lambda, 0)$ un punto genérico de la recta r.

$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(\lambda - 1, \lambda - 1, 0)| = \sqrt{(\lambda-1)^2 + (\lambda-1)^2} = 1$

$$\implies 2\cdot(\lambda-1)^2 = 1 \implies \begin{cases} \lambda - 1 = -\sqrt{2}/2 \implies \lambda = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \implies Q_1\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, 0\right) \\ \lambda - 1 = \sqrt{2}/2 \implies \lambda = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \implies Q_2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0\right) \end{cases}$$

b) Sea $\vec{d_t} = (a,b,c)$ el vector director de la recta t.

Como $r \perp t \implies \vec{d_r} \cdot \vec{d_t} = 0 \implies a + b = 0 \implies b = -a$.

Por otra parte la recta t forma un ángulo de $60°$ con el vector normal al plano $\pi \equiv x = 0$, esto es, $\vec{n_\pi} = (1,0,0)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\left|\vec{d_t} \cdot \vec{n_\pi}\right|}{\left|\vec{d_t}\right| \cdot |\vec{n_\pi}|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{b=-a} \frac{a}{\sqrt{2a^2+c^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = \sqrt{2a^2+c^2} \Rightarrow 4a^2 = 2a^2 + c^2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}a$$

Con lo que le vector $\vec{d_t} = (a,b,c) = (a, -a, \pm\sqrt{2}a) \simeq (1, -1, \pm\sqrt{2})$, y las rectas pedidas:

$$t \equiv \begin{cases} P(1,1,0) \\ d_t = (1,-1,-\sqrt{2}) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -\sqrt{2}\lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$t' \equiv \begin{cases} P(1,1,0) \\ d_{t'} = (1,-1,\sqrt{2}) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un $62\,\%$ y la de que compre el producto B es de un $40\,\%$. Se observa, además, que el $12\,\%$ de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.

c) (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El cliente compra el producto } A\text{”}$$
$$B \equiv \text{“El cliente compra el producto } B\text{”}$$

Del enunciado tenemos que:

$$P(A) = 0.62 \qquad \& \qquad P(B) = 0.4 \qquad \& \qquad P(A \cap B) = 0.12$$

a) $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \dfrac{0.62 - 0.12}{1 - 0.4} = 0.8333$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \Big[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\Big]$

$$= 1 - (0.62 + 0.4 - 0.12) = 0.1$$

c) $X \equiv$ “Nº de personas que compran el producto B” $\longrightarrow X : \mathcal{B}(3000, 0.4)$

$$X : \mathcal{B}(3000, 0.4) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 3000 > 10 \checkmark \\ np = 1200 > 5 \checkmark \\ nq = 1800 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}\Big(np, \sqrt{npq}\Big) = \mathcal{N}(1200, 26.83)$$

$$P(X > 1250) = P(Y \geq 1250.5) = P\Big(Z \geq \frac{1250.5 - 1200}{26.83}\Big) = P(Z \geq 1.88)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.88) = 1 - 0.9699 = 0.0301$$

Junio 2022 (coincidentes)
Opción B

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) *(1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones* $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sea compatible.*

b) *(1.5 puntos) Calcular los valores de a, b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(C) = 2$. Por tanto para que el sistema sea compatible

$$\text{ran}(C^*) = 2 \implies \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies a+1=0 \implies \boxed{a=-1}$$

b) $\underset{3\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 3}{B} = \underset{3\times 3}{?}$ $\qquad$ $\underset{3\times 2}{A} \cdot \underset{3\times 2}{C}$ no se puede operar

$\underset{2\times 3}{B} \cdot \underset{2\times 2}{A}$ no se puede operar $\qquad$ $\underset{2\times 3}{B} \cdot \underset{3\times 2}{C} = \underset{2\times 2}{A}$

$\underset{3\times 2}{C} \cdot \underset{2\times 2}{A} = \underset{3\times 2}{?}$ $\qquad$ $\underset{3\times 2}{C} \cdot \underset{2\times 2}{B} = \underset{3\times 2}{?}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} a+11 & 8 \\ 5a+3c+8 & 2a+2c+6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+11 = c \xrightarrow{a=-5} \boxed{c=6} \\ 8 = 8 \checkmark \\ 5a+3c+8 = 1 \xrightarrow{c=a+11} 5a + 3\cdot(a+11) = -7 \implies 8a = -40 \implies \boxed{a=-5} \\ 2a+2c+6 = b+c \implies 2a - b + c = -6 \xrightarrow[c=6]{a=-5} \boxed{b=2} \end{cases}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea $f(x)$ una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que:

$$f(1) = 2 \quad \& \quad f(2) = 1 \quad \& \quad f'(1) = 1 \quad \& \quad f'(2) = 2$$

Se consideran, además, las funciones:

$$g(x) = (f(x))^2 \qquad \& \qquad h(x) = (f \circ f)(x)$$

Se pide:

a) *(0.5 puntos) Calcular $g(2)$ y $g'(2)$.*

b) *(1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x = 1$.*

c) *(1 punto) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo $(1,2)$ en el que el valor de la derivada de $f(x)$ es -1.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $g(2) = \Big[f(2)\Big]^2 = 1^2 = 1$

$g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) \implies g'(2) = 2 \cdot f(2) \cdot f'(2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

b) $x_0 = 1 \implies y_0 = h(x_0) = h(1) = (f \circ f)(1) = f\Big(f(1)\Big) = f(2) = 1$

$\implies (x_0, y_0) = (1, 1)$

$h'(x) = \Big[f(f(x))\Big]' = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

$m_r = h'(x_0) = h'(1) = f'(f(1)) \cdot f'(1) = f'(2) \cdot 1 = 2$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies \quad y - 1 = 2 \cdot (x - 1) \implies \boxed{r \equiv y = 2x - 1}$

c) $$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ cont. en } [1,2] \\ f(x) \text{ deriv. en } (1,2) \end{array}\right\} \xRightarrow{T.V.M.} \exists c \in (1,2) \mid f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 2}{2 - 1} = -1$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

a) *(0.5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores* $\vec{u} = (0, 0, 1)$ *y* $\vec{v} = (0, 1, \sqrt{3})$.

b) *(1 punto) Sea* O *el origen de coordenadas, y los puntos* $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ *y* $C(0, 2, 2\sqrt{3})$. *Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ *y* $\overline{OC}$.

c) *(1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas* r *y* s, *siendo* r *la recta que pasa por* O *y por* C *y* s *la recta de ecuaciones* $y - 3 = 0$, $z = 0$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 30^\circ}$

b) $Vol = \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 12\sqrt{3}\ u^3$

c) $r \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ C(0,2,2\sqrt{3}) \end{cases} \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{OC} = (0,2,2\sqrt{3}) \simeq (0,1,\sqrt{3}) \end{cases}$

$$s \equiv \begin{cases} y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} S(0,3,0) \\ \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0) \end{cases}$$

- t lleva la dirección $\vec{d_t} = \vec{d_r} \times \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 2\sqrt{3}, -2) \simeq (0, \sqrt{3}, -1)$
- La recta t pertenece a π que contiene a r y lleva la dirección de t
- La recta t pertenece a π que contiene a s y lleva la dirección de t

$$\pi \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{u} = \vec{d_r} = (0,1,\sqrt{3}) \\ \vec{v} = \vec{d_t} = (0,\sqrt{3} - 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi \equiv x = 0$$

$$\pi' \equiv \begin{cases} S(0,3,0) \\ \vec{u} = \vec{d_s} = (1,0,0) \\ \vec{v} = \vec{d_t} = (0,\sqrt{3} - 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' \equiv y + \sqrt{3}z - 3 = 0$$

$$t \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + \sqrt{3}z - 3 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una influencer *famosa publica en su Instagram un* 20 % *de fotografías dedicadas a viajes, un* 50 % *referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El* 5 % *de las publicaciones de viajes reciben menos de* 20000 Me gusta *lo mismo ocurre con el* 20 % *de las de moda y con el* 35 % *de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:*

a) (1.25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20000 Me gusta.

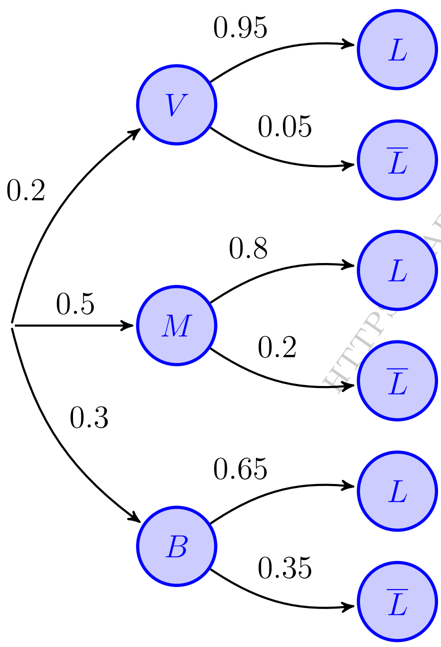
b) (1.25 puntos) Si tiene menos de 20000 Me gusta, *calcuar la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

$$\begin{aligned} V &= \text{“La fotografía es de viajes”} \\ M &= \text{“La fotografía es de moda”} \\ B &= \text{“La fotografía es de maternidad”} \\ L &= \text{“La fotografía tiene más de 20000 } \textit{Me gusta}\text{”} \end{aligned}$$



a) $$\begin{aligned} P(L) &= P\Big((V\cap L)\cup(M\cap L)\cup(B\cap L)\Big) \\ &= P(V\cap L)+P(M\cap L)+P(B\cap L) \\ &= P(V)\cdot P(L\mid V)+P(M)\cdot P(L\mid M) \\ &+ P(B)\cdot P(L\mid B) = 0.2\cdot 0.95 \\ &+ 0.5\cdot 0.8 + 0.3\cdot 0.65 = 0.785 \end{aligned}$$

b) $$P(V\mid \overline{L}) = \frac{P(V\cap\overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{P(V)\cdot P(\overline{L}\mid V)}{1-P(L)} = \frac{0.2\cdot 0.05}{1-0.785} = 0.0465$$