MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2019
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2019
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ *y* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, se pide:*

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Vamos a estudiar el rango de la matriz A por el método de los determinantes y por el método de Gauss.

Método de los determinantes

- Como $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) \geq 2$
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 6 + 8 - (-4a + 3a + 4) = a^2 + a - 2 = 0 \implies a = \{-2, 1\}$

Por tanto:
∘ Si $a \neq \{-2, 1\} \implies \text{ran}(A) = 3$
∘ Si $a = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ y como $F_2 = -F_3 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$
∘ Si $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y como $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$

Método de Gauss

$$\text{A} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & a-3 & -2 & 1-a \\ 0 & 5 & a+4 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \\ \\ (a-3)F_3 - 5F_2 \end{bmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & a-3 & -2 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \implies a = \{-2, 1\}$$

∘ Si $a \neq \{-2, 1\} \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & \square & \square \end{pmatrix} \implies \text{ran}(A) = 3$
∘ Si $a = \{-2, 1\} \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{ran}(A) = 2$

b) Cuando $a = 0$ la matriz AM vale:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|AM| = -2 \implies \exists\,(AM)^{-1}$ que hallaremos por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj }(AM) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(AM)^{-1} = \frac{1}{|AM|}\text{Adj }(AM)^{\top} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, *donde* ln *denota el logaritmo neperiano, definida para* $x > 0$, *se pide:*

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ *en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.*

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ *y las rectas* $y = 0$ *y* $x = e$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) La A. Horizontal será $y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \implies 1 - \ln(x) = 0 \implies x = e$

$f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\cdot(1-\ln(x))}{x^4} \implies f''(e) = -\dfrac{1}{e^3} \neq 0 \implies x = e$ es un extremo relativo (Máximo) en el punto $(e, {}^{1}/_{e})$

c) Hallamos el punto de corte de la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX

$\dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \implies \ln(x) = 0 \implies x = 1$. De esta forma tenemos un único recinto de integración $A_1 = (1, e)$.

$$A_1 = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(x)^2\Big]_1^e = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Area $= \dfrac{1}{2}\,u^2$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ *y la recta* s *que pasa por el punto* $(2,-5,1)$ *y tiene dirección* $(-1,0,-1)$*, se pide:*

a) *(1 punto) Estudiar la posición relaiva de las dos rectas.*

b) *(1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a* r *y contenga a* s*.*

c) *(0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta* r *y que pase por el origen de coordenadas.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,3,0) \\ \vec{d_r} = (2,-2,1) \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} S(2,-5,1) \\ \vec{d_s} = (-1,0,-1) \end{cases}$$

a) Como $\vec{d_r}$ y $\vec{d_s}$ no son proporcionales entonces $r \nparallel s$.

$$\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan en el espacio.}$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} \pi \parallel r \\ s \in \pi \end{cases} \equiv \begin{cases} \vec{u} = \vec{d_r} = (2,-2,1) \\ S(2,-5,1) \\ \vec{v} = \vec{d_s} = (-1,0,-1) \end{cases} \equiv \left[\overrightarrow{SX}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(x-2)+(y+5)-2(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0}$$

c) $$\beta \equiv \begin{cases} \beta \perp r \Rightarrow \vec{n}_\beta = \vec{d_r} = (2,-2,1) \\ O(0,0,0) \in \beta \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - 2y + z + \lambda = 0 \\ 0+0+0+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\implies \boxed{\beta \equiv 2x - 2y + z = 0}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Sea $X \equiv$ "Nº de peces que sobreviven al quinto año", así $X : \mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}(10, 0.1)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9\right] = 1 - 0.736 = 0.264 \end{aligned}$$

b) $X : \mathcal{B}(200, 0.1) \begin{cases} np = 200 \cdot 0.1 = 20 > 5 \checkmark \\ nq = 200 \cdot 0.9 = 180 > 5 \checkmark \end{cases} \xRightarrow{Yates} \widetilde{X} : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(20, 4.24)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P(\widetilde{X} \geq 9.5) = P\left(Z \geq \tfrac{9.5-20}{4.24}\right) = P(Z \geq -2.48) \\ &= P(Z \leq 2.48) = 0.9934 \end{aligned}$$

Junio 2019
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Precio de un bocadillo (€)"} \\ y &\equiv \text{"Precio de un refresco (€)"} \\ z &\equiv \text{"Precio de una bolsa de patatas (€)"} \end{aligned}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 15 \\ x + z = 4 \\ x + y = {}^{3}/_{0.6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 15 \\ x + z = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de Gauss

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left[F_1 \leftrightarrow F_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 = 5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y + 1 = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

> *Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:*
>
> a) *(0.5 puntos) Determinar su dominio.*
>
> b) *(1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.*
>
> c) *(0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)*

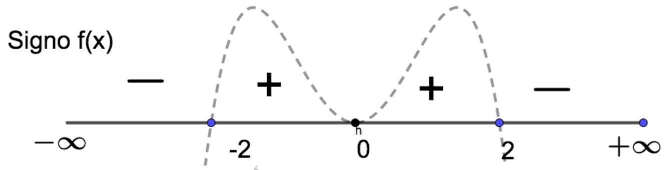
Solución.

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$

$4x^2 - x^4 \geq 0$

$-x^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2) \geq 0$

$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-2, 2)\}$

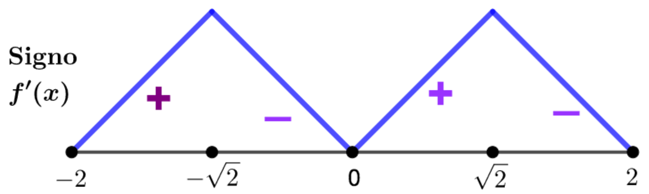


b) $f'(x) = \dfrac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0$

$8x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x \cdot (8 - 4x^2) = 0$

$-4x \cdot \left(x - \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + \sqrt{2}\right) = 0$

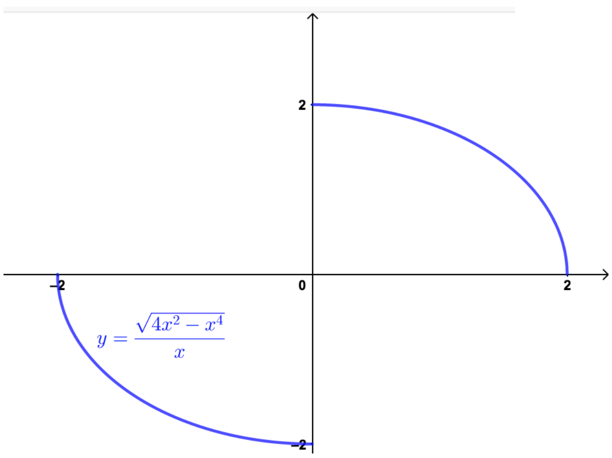
$x = \left\{0, \pm\sqrt{2}\right\}$



$f(x)$ es *creciente* en $(-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ y *decreciente* en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$ y tiene *máximos* en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-\cancel{x}\sqrt{4 - x^2}}{\cancel{x}} = -2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{4 - x^2}}{\cancel{x}} = 2$



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

> *Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:*
>
> *a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.*
>
> *b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.*
>
> *c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)*

Solución.

a) $d(A,\pi)=\dfrac{|2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 0-36|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\dfrac{|-29|}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}\ u$

b) Piden hallar $B\in\pi$ de forma que $d(A,B)_{min}=\sqrt{29}$, es decir, $B\in r \mid r\perp\pi \ \&\ A\in r$.

$$r\equiv\begin{cases}A(2,1,0)\\ \vec{d_r}=\vec{n}_\pi=(2,3,4)\end{cases}\equiv\begin{cases}x=2+2\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=4\lambda\end{cases}\Longrightarrow B(2+2\lambda,1+3\lambda,4\lambda)$$

$$d(A,B)=|(2\lambda,3\lambda,4\lambda)|=\sqrt{(2\lambda)^2+(3\lambda)^2+(4\lambda)^2}=\sqrt{29\lambda^2}=\sqrt{29}\Longrightarrow\lambda=\pm 1$$

- Si $\lambda=-1 \Longrightarrow B(0,-2,-4)\Longrightarrow 2\cdot 0+3\cdot(-2)+4\cdot(-4)=-22\neq 36\notin\pi$
- Si $\lambda=1\Longrightarrow B(4,4,4)\Longrightarrow 2\cdot 4+3\cdot 4+4\cdot 4=36$ ✓

por tanto el punto buscado es:

$$\boxed{B(4,4,4)}$$

Otra opción habría sido hallar $r\perp\pi \quad \& \quad r\in A$ y luego hallar el punto $B=r\cap\pi$

c) El punto $A'(a,b,c)$, simétrico de A respecto al plano π, es tal que B es el punto medio de A y A'

$$B=\frac{1}{2}(A+A')\Longrightarrow A'=2B-A=2(4,4,4)-(2,1,0)\Longrightarrow\boxed{A'(6,7,8)}$$

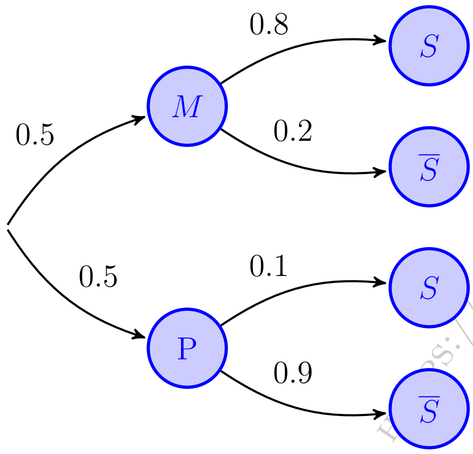
Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

> *Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un* $80\,\%$ *de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del* $10\,\%$*. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.*
>
> *a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.*
>
> *b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{"El paciente toma el medicamento"}$$
$$P \equiv \text{"El paciente toma el placebo"}$$
$$S \equiv \text{"El paciente sana"}$$



$$\begin{aligned}
\text{a)}\ \ P(S) &= P\big((M\cap S)\cup(P\cap S)\big) \\
&= P(M\cap S) + P(P\cap S) \\
&= P(M)\cdot P(S \mid M) + P(P)\cdot P(S\cap P) \\
&= 0.5\cdot 0.8 + 0.5\cdot 0.1 = 0.45
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)}\ \ P(M\cap S) &= \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{P(M)\cdot P(S\mid M)}{P(S)} \\
&= \frac{0.5\cdot 0.8}{0.45} = 0.889
\end{aligned}$$